01 다항식의 연산

01 다항식의 연산

1. **다항식의 덧셈**: 동류항끼리 모은 후 계수를 더하여 간단히 정리
2. **다항식의 뺄셈**: 빼는 식의 각 항의 부호를 바꾼 후 더하여 정리
3. **다항식의 곱셈**: 곱셈에 대한 연산법칙을 이용하여 전개한 다음 동류항끼리 모아서 정리

02 곱셈 공식

1. $m(a+b)=ma+mb$
2. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
3. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
4. $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$
5. $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$
6. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
7. $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$, $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$
8. $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$
9. $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$
10. $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4$

03 곱셈 공식의 변형

1. $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$
2. $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$
3. $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$
4. $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
5. $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$
6. $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
7. $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=\frac{1}{2}\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}$

 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$
8. $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

04 다항식의 나눗셈

다항식 A를 다항식 $B\,(B\neq 0)$로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면

$$A=BQ+R \quad (\text{단, } (R\text{의 차수})<(B\text{의 차수}))$$

가 성립한다. 특히 $R=0$, 즉 $A=BQ$일 때, A는 B로 **나누어떨어진다**고 한다.

마·타·노·트

▶ **다항식의 덧셈에 대한 연산법칙**

세 다항식 A, B, C에 대하여 덧셈에 대한 다음 연산법칙이 성립한다.

1. 교환법칙 $A+B=B+A$
2. 결합법칙 $(A+B)+C=A+(B+C)$

▶ **다항식의 곱셈에 대한 연산법칙**

세 다항식 A, B, C에 대하여 곱셈에 대한 다음 연산법칙이 성립한다.

1. 교환법칙 $AB=BA$
2. 결합법칙 $(AB)C=A(BC)$
3. 분배법칙 $A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$

▶ **곱셈 공식의 변형의 활용**

1. $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$
2. $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$

001 2013학년도 03월 교육청

개념 01

가로 세 칸, 세로 세 칸으로 이루어진 표에 세 다항식 $2x-2$, $2x^2+4x$, $-x^2+x-3$을 그림과 같이 한 칸에 하나씩 써 넣었다. 가로, 세로, 대각선으로 배열된 각각의 세 다항식의 합이 $6x^2+12x$와 같도록 나머지 칸에 써 넣으려 할 때, (가)의 위치에 알맞은 다항식은 $f(x)$이다. $f(10)$의 값을 구하시오.

(나)		
$2x-2$	$2x^2+4x$	
(가)		$-x^2+x-3$

그림과 같이 (나)에 다항식 $g(x)$가 있을 때, 대각선방향(↖)의 다항식의 합은

$$g(x)+(2x^2+4x)+(-x^2+x-3)=6x^2+12x$$

이므로 $g(x)=5x^2+7x+3$이고 (나)부터 아래 방향(↓)의 다항식의 합은

$$g(x)+(2x-2)+f(x)=(5x^2+7x+3)+(2x-2)+f(x)=6x^2+12x$$

이므로 $f(x)=x^2+3x-1$이다. 따라서 구하는 값은 $f(10)=10^2+3\cdot10-1=129$이다.

답 129

002 2013학년도 06월 교육청

개념 02

두 다항식 A, B에 대하여 연산 $<A, B>$를

$$<A, B>=A^2+AB+B^2$$

으로 정의할 때, 다항식 $<x^2+x+1, x^2+x>$의 전개식에서 x의 계수는?

① 3 ② 5 ③ 7
④ 9 ⑤ 11

$<x^2+x+1, x^2+x>$의 전개식

$$(x^2+x+1)^2+(x^2+x+1)(x^2+x)+(x^2+x)^2$$

에서 일차항인 x의 계수를 구할 때, 이차항 x^2은 의미가 없으므로 $<x^2+x+1, x^2+x>$의 전개식에서 x의 계수와 $<x+1, x>$의 전개식에서 x의 계수는 같다. 따라서 $<x+1, x>$의 전개식에서 x의 계수를 구하면

$$<x+1, x>=(x+1)^2+(x+1)x+x^2=3x^2+3x+1$$

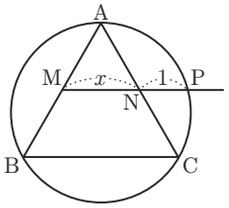
이므로 구하는 x의 계수는 3이다.

답 ①

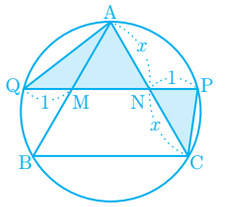
003 2015학년도 06월 교육청

개념 05, 06

정삼각형 ABC에서 두 변 AB와 AC의 중점을 각각 M, N이라 하자. 오른쪽 그림과 같이 점 P는 반직선 MN이 삼각형 ABC의 외접원과 만나는 점이고 $\overline{NP}=1$이다. $\overline{MN}=x$라 할 때, $10\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$의 값을 구하시오.



그림과 같이 반직선 NM이 삼각형 ABC의 외접원과 만나는 점을 Q라 하자. 삼각형 AQN과 삼각형 PCN이 닮음이므로



$$(1+x):x=x:1$$

이다. 따라서

$$(1+x)=x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2-x-1=0$$

이고 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면

$$x-1-\frac{1}{x}=0 \quad \Rightarrow \quad x-\frac{1}{x}=1$$

이고 곱셈 공식의 변형을 이용하면

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=3$$

이다. 따라서 구하는 값은

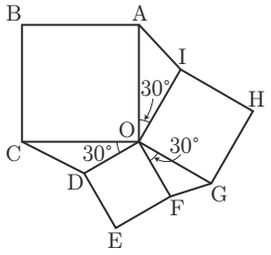
$$10\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=30$$

답 30

004 2010학년도 06월 교육청

개념 05, 06

오른쪽 그림과 같이 세 정사각형 OABC, ODEF, OGHI와 세 삼각형 OCD, OFG, OIA는 한 점 O에서 만나고, $\angle COD=\angle FOG=\angle IOA=30°$이다. 세 삼각형 넓이의 합이 26이고, 세 정사각형 둘레 길이의 합이 72일 때, 세 정사각형 넓이의 합을 구하시오.



세 정사각형의 한 변의 길이를 각각 a, b, c라 하면

$$\frac{1}{2}ab\sin30°+\frac{1}{2}bc\sin30°+\frac{1}{2}ca\sin30°=26 \quad \cdots ㉠$$

$$4a+4b+4c=72 \quad \cdots ㉡$$

이므로 식을 정리하면 ㉠에서 $ab+bc+ca=104$이고, ㉡에서 $a+b+c=18$이다. 세 정사각형의 넓이의 합은 $a^2+b^2+c^2$이므로 곱셈 공식의 변형을 이용하면

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$$

$$=18^2-2\cdot104=116$$

답 116

개념치료

개념

01. 다항식의 덧셈과 뺄셈

005

두 다항식 $A=2x^2-3xy+y^2$, $B=3x^2+xy-y^2$에 대하여 $2(X+A)-B=3B$를 만족하는 다항식 X를 구하시오.

$2(X+A)-B=3B$에서 $2X+2A=4B$ 즉, $X=2B-A$이므로

$$\begin{aligned}X&=2B-A\\&=2(3x^2+xy-y^2)-(2x^2-3xy+y^2)\\&=6x^2+2xy-2y^2-2x^2+3xy-y^2\\&=4x^2+5xy-3y^2\end{aligned}$$

답 $4x^2+5xy-3y^2$

006 중요

두 다항식 A, B에 대하여 $A\odot B=2A-B$일 때,

$$\{2(-x^3+2x-3)\}\odot\{5(x^2-3x-3)\}$$

을 간단히 하시오.

$A\odot B=2A-B$이므로 다항식의 뺄셈을 이용하면 주어진 식은

$$\begin{aligned}&2\cdot2(-x^3+2x-3)-5(x^2-3x-3)\\&=-4x^3+8x-12-5x^2+15x+15\\&=-4x^3-5x^2+23x+3\end{aligned}$$

답 $-4x^3-5x^2+23x+3$

007

세 다항식 $A=2x^2-3xy+4$, $B=-x^2+4xy-1$, $C=3x^2+2xy+2$에 대하여 $2(A+B)-3(B-C)$에서 x^2의 계수를 a, xy의 계수를 b라 할 때, $a+b$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

주어진 식을 정리하면

$$\begin{aligned}&2(A+B)-3(B-C)\\&=2A+2B-3B+3C=2A-B+3C\\&=2(2x^2-3xy+4)-(-x^2+4xy-1)+3(3x^2+2xy+2)\\&=4x^2-6xy+8+x^2-4xy+1+9x^2+6xy+6\\&=14x^2-4xy+15\end{aligned}$$

이다. 따라서 $a=14$, $b=-4$이고 구하는 값은 $a+b=10$이다.

답 ⑤

개념

02. 다항식의 곱셈

008

$(x^2-xy+4)(2x^2+3xy-1)$의 전개식에서 x^3y의 계수를 a, x^2y^2의 계수를 b, xy의 계수를 c라 할 때, $a+b+c$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

주어진 식을 전개하면

$$\begin{aligned}&(x^2-xy+4)(2x^2+3xy-1)\\&=x^2(2x^2+3xy-1)-xy(2x^2+3xy-1)+4(2x^2+3xy-1)\\&=2x^4+3x^3y-x^2-2x^3y-3x^2y^2+xy+8x^2+12xy-4\\&=2x^4+x^3y-3x^2y^2+7x^2+13xy-4\end{aligned}$$

이므로 $a=1$, $b=-3$, $c=13$이고 구하는 값은 $a+b+c=11$이다.

답 ①

009 중요

$(2-3x+x^2+2x^3)(3+2x+5x^2-x^3)$의 전개식에서 x^5의 계수를 구하시오.

주어진 다항식

$$(2-3x+x^2+2x^3)(3+2x+5x^2-x^3)$$

을 전개했을 때, x^5항은

$$x^2\times(-x^3)+2x^3\times5x^2$$

이다. 계수들을 계산하여 정리하면

$$-x^5+10x^5=9x^5$$

이므로 x^5의 계수는 9이다.

답 9

010 상위1%

$(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5+7x^6)^4$의 전개식에서 x^3의 계수를 구하시오.

$A=1+2x+3x^2+4x^3$, $B=5x^4+6x^5+7x^6$라 하면 주어진 식은

$$(A+B)^4=\{(A+B)^2\}^2=(A^2+2AB+B^2)^2$$

이다. 주어진 식의 전개식에서 x^3의 계수는 $A^2\times A^2$, 즉

$$A^2\times A^2=(1+2x+3x^2+4x^3)^2(1+2x+3x^2+4x^3)^2$$

의 전개식에서 x^3의 계수를 구하면 된다. 먼저 $A^2=(1+2x+3x^2+4x^3)^2$의 전개식에서 삼차 이하의 항을 각각 구하면

$$\begin{aligned}&\text{상수항: } 1^2=1\\&x\text{항: } 2\cdot1\cdot2x=4x\\&x^2\text{항: } (2x)^2+2\cdot1\cdot3x^2=10x^2\\&x^3\text{항: } 2\cdot1\cdot4x^3+2\cdot2x\cdot3x^2=20x^3\end{aligned}$$

이다. 따라서 $A^2\times A^2$의 전개식에서 x^3의 계수만 구하면

$$2\cdot1\cdot20x^3+2\cdot4x\cdot10x^2=120x^3$$

이므로 주어진 식의 x^3의 계수는 120이다.

답 120

개념

03. 곱셈 공식

011 중요

다항식 $(2a-b)(2a+b)(4a^2+2ab+b^2)(4a^2-2ab+b^2)$을 전개하시오.

다항식의 곱셈에서 교환법칙이 성립하므로 식의 순서를 바꾼 뒤 곱셈 공식을 이용하여 전개하면

$$\begin{aligned}&(2a-b)(2a+b)(4a^2+2ab+b^2)(4a^2-2ab+b^2)\\&=(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)(2a+b)(4a^2-2ab+b^2)\\&=(8a^3-b^3)(8a^3+b^3)=64a^6-b^6\end{aligned}$$

답 $64a^6-b^6$

012

다항식 $(x+y-z)\{(x-y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2\}$을 전개하시오.

곱셈 공식을 이용하여 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&(x+y-z)\{(x-y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2\}\\&=(x+y-z)(2x^2+2y^2+2z^2-2xy+2yz+2zx)\\&=2(x+y-z)(x^2+y^2+z^2-xy+yz+zx)\\&=2\{x^3+y^3+(-z)^3-3xy(-z)\}\\&=2(x^3+y^3-z^3+3xyz)\\&=2x^3+2y^3-2z^3+6xyz\end{aligned}$$

답 $2x^3+2y^3-2z^3+6xyz$

013

세 다항식 $A=2x^2-3x+1$, $B=-x^2+x+3$, $C=-2x^2-x-1$에 대하여 $(A+B)(B-C)$를 구하시오.

다항식의 덧셈과 뺄셈을 이용하여 $A+B$, $B-C$를 각각 구하면

$$A+B=x^2-2x+4,\quad B-C=x^2+2x+4$$

이다. 이제 $(A+B)(B-C)$를 곱셈 공식을 이용하여 전개하면

$$\begin{aligned}(A+B)(B-C)&=(x^2-2x+4)(x^2+2x+4)\\&=x^4+4x^2+16\end{aligned}$$

답 x^4+4x^2+16

개념

04. 공통부분이 있는 다항식의 전개

014

$(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)$를 전개하면?

① $x^4-2x^3+7x^2+24x+24$ ② $x^4+4x^3-7x^2-22x+24$

③ $x^4+2x^3+7x^2+20x+24$ ④ $x^4-4x^3-7x^2-22x+24$

⑤ $x^4+4x^3+7x^2+20x+24$

일차항이 $2x$가 되도록 짝을 지어 전개하면

$$\begin{aligned}(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)&=\{(x-1)(x+3)\}\{(x-2)(x+4)\}\\&=(x^2+2x-3)(x^2+2x-8)\end{aligned}$$

이다. 공통부분을 $x^2+2x=X$로 놓으면

$$(x^2+2x-3)(x^2+2x-8)=(X-3)(X-8)=X^2-11X+24$$

이고, 다시 $X=x^2+2x$를 대입하면

$$\begin{aligned}X^2-11X+24&=(x^2+2x)^2-11(x^2+2x)+24\\&=x^4+4x^3-7x^2-22x+24\end{aligned}$$

답 ②

015 중요

다항식 $(2x-y-z+1)(2x+y-z-1)$을 전개하시오.

공통부분이 나타나도록 짝을 지어 전개하면

$$\begin{aligned}&(2x-y-z+1)(2x+y-z-1)\\&=\{(2x-z)-(y-1)\}\{(2x-z)+(y-1)\}\\&=(2x-z)^2-(y-1)^2\\&=4x^2-4xz+z^2-y^2+2y-1\end{aligned}$$

답 $4x^2-4xz-y^2+z^2+2y-1$

016 상위 1%

$(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$를 전개하시오.

공통부분이 나타나도록 적당히 짝을 지은 후 곱셈 공식을 이용하여 전개하면

$$\begin{aligned}&(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\\&=\{(b+c)+a\}\{(b+c)-a\}\{a-(b-c)\}\{a+(b-c)\}\\&=\{(b+c)^2-a^2\}\{a^2-(b-c)^2\}\\&=\{2bc+(b^2+c^2-a^2)\}\{2bc-(b^2+c^2-a^2)\}\\&=(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2\\&=-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2\end{aligned}$$

답 $-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2$

개념

05. 곱셈 공식의 변형

017 중요

$x+\frac{1}{x}=4$일 때, $x^4+\frac{1}{x^4}$의 값은?

① 190 ② 192 ③ 194

④ 196 ⑤ 198

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$를 이용하면

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{x}=4^2-2=14$$

이므로 곱셈 공식의 변형을 다시 이용하면 구하는 값은 다음과 같다.

$$x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2\cdot x^2\cdot\frac{1}{x^2}=14^2-2=194$$

답 ③

018

세 수의 합이 7인 실수 a, b, c가

$$2a-b=\frac{1}{2}bc,\quad 2b-c=\frac{1}{2}ca,\quad 2c-a=\frac{1}{2}ab$$

를 만족시킬 때, $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하시오.

주어진 식을 변끼리 모두 더하면

$$a+b+c=\frac{1}{2}(ab+bc+ca)=7$$

이고 $ab+bc+ca=14$이므로 곱셈 공식의 변형을 이용하면 구하는 값은 다음과 같다.

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$$
$$=7^2-2\cdot 14=21$$

답 21

019 중요

$a+b+c=\sqrt{3}$, $a^2+b^2+c^2=5$, $abc=-\sqrt{3}$일 때,

$$\frac{c-a}{ab}+\frac{a-b}{bc}+\frac{b-c}{ca}$$

의 값을 구하시오.

주어진 식의 분모를 통분하여 정리하면

$$\frac{c-a}{ab}+\frac{a-b}{bc}+\frac{b-c}{ca}=\frac{c^2-ac}{abc}+\frac{a^2-ab}{abc}+\frac{b^2-bc}{abc}$$
$$=\frac{a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)}{abc}$$

이므로 주어진 식의 값을 구하기 위해서는 $ab+bc+ca$의 값이 필요하다. 곱셈 공식의 변형을 이용하면

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$$
$$5=3-2(ab+bc+ca)$$

에서 $ab+bc+ca=-1$이고 구하는 값은 다음과 같다.

$$\frac{a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)}{abc}=\frac{5+1}{-\sqrt{3}}=-2\sqrt{3}$$

답 $-2\sqrt{3}$

020

두 실수 a, b에 대하여 $2a+b=-1$, $4a^2+b^2=13$일 때, $8a^3+b^3$의 값을 구하시오.

곱셈 공식의 변형을 이용하면

$$8a^3+b^3=(2a+b)^3-3\cdot 2a\cdot b(2a+b)=(2a+b)^3-6ab(2a+b)$$

이므로 ab의 값이 필요하다. $4a^2+b^2=13$에서 곱셈 공식의 변형을 이용하면

$$4a^2+b^2=(2a+b)^2-2\cdot(2a)\cdot b \quad\Rightarrow\quad 13=1-4ab$$

에서 $ab=-3$이므로 구하는 값은 다음과 같다.

$$(2a+b)^3-6ab(2a+b)=(-1)^3-6\cdot(-3)\cdot(-1)=-19$$

답 -19

021

세 실수 a, b, c에 대하여 $a+b+c=9$, $a^3+b^3=3abc-c^3$일 때, $a^2+b^2+c^2$의 값은?

① 14 ② 17 ③ 22

④ 27 ⑤ 34

$a^3+b^3=3abc-c^3$에서 $a^3+b^3+c^3=3abc$이고 곱셈 공식의 변형을 이용하면

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$$
$$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}+3abc$$

이므로

$$(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$$

이다. $a+b+c>0$이므로 $a=b=c$일 때, 주어진 식을 만족한다. 따라서 $a+b+c=9$에서 $a=b=c=3$이고 구하는 값은 $a^2+b^2+c^2=27$이다.

답 ④

022

$ab>0$인 두 실수 a, b에 대하여 $\frac{b^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}=6$일 때, $\frac{b^3}{a^3}+\frac{a^3}{b^3}$의 값을 구하시오.

$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=X$라 하고 곱셈 공식의 변형을 이용하면

$$\frac{b^3}{a^3}+\frac{a^3}{b^3}=\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)^3-3\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)$$
$$=X^3-3X=X(X^2-3) \qquad \cdots ㉠$$

이다. 한편, $ab>0$에서 $\frac{b}{a}>0$, $\frac{a}{b}>0$이므로 $X>0$이다. 따라서

$$X^2=\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)^2=\frac{b^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}+2=6+2=8$$

에서 $X=2\sqrt{2}$이다. 이를 ㉠에 대입하면 구하는 값은 다음과 같다.

$$\frac{b^3}{a^3}+\frac{a^3}{b^3}=2\sqrt{2}(8-3)=10\sqrt{2}$$

답 $10\sqrt{2}$

개념

06. 곱셈 공식의 활용

023

$(7+6)(7^2+6^2)(7^4+6^4)$의 값은?

① 7^6-6^6 ② 7^6+6^6 ③ 7^8-6^8

④ 7^8+6^8 ⑤ $7^{12}+6^{12}$

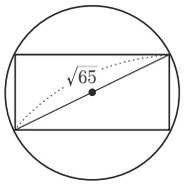
곱셈 공식을 이용하기 위해 주어진 식에 $(7-6)$을 곱하면

$$\begin{aligned}(7+6)(7^2+6^2)(7^4+6^4)&=(7-6)(7+6)(7^2+6^2)(7^4+6^4)\\&=(7^2-6^2)(7^2+6^2)(7^4+6^4)\\&=(7^4-6^4)(7^4+6^4)=7^8-6^8\end{aligned}$$

답 ③

024 중요

오른쪽 그림과 같이 지름의 길이가 $\sqrt{65}$인 원에 내접하고 둘레의 길이가 22인 직사각형이 있다. 이 직사각형의 넓이는?



① 20 ② 22 ③ 24

④ 26 ⑤ 28

직사각형의 가로와 세로의 길이를 각각 a, b라 하자. 직사각형의 둘레의 길이는 $2(a+b)=22$이고 지름의 길이는 직사각형의 대각선의 길이와 같으므로 $a^2+b^2=\sqrt{65}^2=65$이다. 곱셈 공식의 변형을 이용하면

$$\begin{aligned}a^2+b^2&=(a+b)^2-2ab\\65&=(11)^2-2ab=121-2ab\end{aligned}$$

에서 구하는 직사각형의 넓이는 $ab=28$이다.

답 ⑤

025 상위1%

0.999^3을 계산하였을 때, 소수점 아래 둘째 자리의 수를 a, 소수점 아래 셋째 자리의 수를 b, 소수점 아래 여섯째 자리의 수를 c라 하자. $a+b+c$의 값을 구하시오.

$0.999=1-0.001$이므로

$$\begin{aligned}0.999^3&=(1-0.001)^3\\&=1^3-3\cdot1^2\cdot0.001+3\cdot1\cdot0.001^2-0.001^3\\&=1-0.003+0.000003-0.000000001\\&=0.997002999\end{aligned}$$

에서 $a=9$, $b=7$, $c=2$이므로 구하는 값은 $a+b+c=18$이다.

답 18

개념

07. 다항식의 나눗셈

026

다항식 $3x^3+2x^2-3x+4$를 x^2+2x-1로 나누었을 때의 몫이 $ax+b$이고 나머지가 $cx+d$일 때, 상수 a, b, c, d에 대하여 $a+b+c+d$의 값은?

① 3 ② 5 ③ 7

④ 9 ⑤ 11

다항식 $3x^3+2x^2-3x+4$를 x^2+2x-1로 나누었을 때의 몫은 $3x-4$이고 나머지는 $8x$이므로

$$3x^3+2x^2-3x+4=(x^2+2x-1)(3x-4)+8x$$

이다. $a=3$, $b=-4$, $c=8$, $d=0$이고 구하는 값은 $a+b+c+d=7$이다.

$$\begin{array}{r}3x-4\\ x^2+2x-1\overline{)\,3x^3+2x^2-3x+4}\\ \underline{3x^3+6x^2-3x}\\ -4x^2+4\\ \underline{-4x^2-8x+4}\\ 8x\end{array}$$

답 ③

027 중요

다항식 A를 다항식 $2x^2-x+4$로 나누었을 때의 몫이 x^2+x-2이고, 나머지가 $3x-4$일 때, 다항식 A를 구하시오.

다항식 A를 다항식 $2x^2-x+4$로 나누었을 때의 몫이 x^2+x-2이고 나머지가 $3x-4$이므로

$$\begin{aligned}A&=(2x^2-x+4)(x^2+x-2)+3x-4\\&=2x^2(x^2+x-2)-x(x^2+x-2)+4(x^2+x-2)+3x-4\\&=2x^4+x^3-x^2+9x-12\end{aligned}$$

답 $2x^4+x^3-x^2+9x-12$

028

다항식 $5x^3-x^2+5x-10$을 x^2+x+1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라 할 때, $\{Q(10)\}^2-\{R(10)\}^2$의 값을 구하시오.

다항식 $5x^3-x^2+5x-10$을 x^2+x+1으로 나누었을 때의 몫은 $Q(x)=5x-6$이고 나머지는 $R(x)=6x-4$이므로 $Q(10)=44$, $R(10)=56$이다. 따라서 구하는 값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&\{Q(10)\}^2-\{R(10)\}^2\\&=\{Q(10)+R(10)\}\{Q(10)-R(10)\}\\&=100\cdot(-12)=-1200\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}5x-6\\ x^2+x+1\overline{)\,5x^3-x^2+5x-10}\\ \underline{5x^3+5x^2+5x}\\ -6x^2-10\\ \underline{-6x^2-6x-6}\\ 6x-4\end{array}$$

답 −1200

029

$\{(7+4\sqrt{3})^n+(7-4\sqrt{3})^n\}^2-\{(7+4\sqrt{3})^n-(7-4\sqrt{3})^n\}^2$을 간단히 하시오. (단, n은 자연수이다.)

$(7+4\sqrt{3})^n=a$, $(7-4\sqrt{3})^n=b$로 치환하면 주어진 식은

$$\begin{aligned}&\{(7+4\sqrt{3})^n+(7-4\sqrt{3})^n\}^2-\{(7+4\sqrt{3})^n-(7-4\sqrt{3})^n\}^2\\&=(a+b)^2-(a-b)^2=4ab\\&=4(7+4\sqrt{3})^n(7-4\sqrt{3})^n\\&=4\{(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})\}^n\\&=4\{7^2-(4\sqrt{3})^2\}^n=4\cdot1^n=4\end{aligned}$$

답 4

030 마타

$x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{6}$일 때, $2x^4$의 값을 구하시오. (단, $x>1$이다.)

$2x^4=2(x^2)^2$이고,

$$2x^2=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)$$

이다. $x^2+\dfrac{1}{x^2}$의 값은 곱셈 공식의 변형을 이용하면

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=6-2=4 \quad \cdots ㉠$$

이다. 또한 $x>1$에서 $x-\dfrac{1}{x}>0$이므로

$$x-\frac{1}{x}=\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4}=\sqrt{6-4}=\sqrt{2}$$

이고 $x^2-\dfrac{1}{x^2}$의 값은

$$x^2-\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)=\sqrt{6}\sqrt{2}=2\sqrt{3} \quad \cdots ㉡$$

이다. ㉠+㉡을 하면 $2x^2=4+2\sqrt{3}$에서 $x^2=2+\sqrt{3}$이다. 따라서 구하는 값은

$$2x^4=2(x^2)^2=2(2+\sqrt{3})^2=14+8\sqrt{3}$$

답 $14+8\sqrt{3}$

031

a, b, c가 서로 다른 실수일 때,

$$\frac{(a-b)^2}{(b-c)(c-a)}+\frac{(b-c)^2}{(c-a)(a-b)}+\frac{(c-a)^2}{(a-b)(b-c)}$$

의 값을 구하시오.

$a-b=x$, $b-c=y$, $c-a=z$로 치환하면 주어진 식은

$$\begin{aligned}&\frac{(a-b)^2}{(b-c)(c-a)}+\frac{(b-c)^2}{(c-a)(a-b)}+\frac{(c-a)^2}{(a-b)(b-c)}\\&=\frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{zx}+\frac{z^2}{xy}=\frac{x^3+y^3+z^3}{xyz} \quad \cdots ㉠\end{aligned}$$

이다.

$$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$$

에서 $x+y+z=0$이므로 $x^3+y^3+z^3=3xyz$이다. 이를 ㉠에 대입하면

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{xyz}=\frac{3xyz}{xyz}=3$$

이므로 구하는 값은 3이다.

답 3

032

세 실수 x, y, z가 다음 조건을 만족한다.

(가) x, $2y$, $3z$ 중에서 적어도 하나는 2이다.
(나) $2(x+2y+3z)=2xy+6yz+3zx$

$3xyz$의 값을 구하시오.

조건 (가)에서 x, $2y$, $3z$ 중에서 적어도 하나는 2이므로

$$(x-2)(2y-2)(3z-2)=0$$

이고, 이를 전개하면

$$6xyz-2(2xy+6yz+3zx)+4(x+2y+3z)-8=0$$

이다. 여기에 조건 (나)의 식을 대입하면

$$6xyz-8=0$$

에서 구하는 값은 $3xyz=4$이다.

답 4

033

실수 a에 대하여 $a^2-3a+1=0$일 때,

$$a^4+2a^3+3a^2+\frac{3}{a^2}+\frac{2}{a^3}+\frac{1}{a^4}$$

의 값을 구하시오.

$a\neq0$이므로 $a^2-3a+1=0$의 양변을 a로 나누면

$$a-3+\frac{1}{a}=0 \quad \Rightarrow \quad a+\frac{1}{a}=3$$

이다. 곱셈 공식의 변형을 이용하여 $a^2+\dfrac{1}{a^2}$, $a^3+\dfrac{1}{a^3}$, $a^4+\dfrac{1}{a^4}$을 각각 구하면

$$a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2=9-2=7$$

$$a^3+\frac{1}{a^3}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^3-3\left(a+\frac{1}{a}\right)=27-9=18$$

$$a^4+\frac{1}{a^4}=\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^2-2=49-2=47$$

이다. 따라서 구하는 값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}a^4+2a^3+3a^2+\frac{3}{a^2}+\frac{2}{a^3}+\frac{1}{a^4}&=\left(a^4+\frac{1}{a^4}\right)+2\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right)+3\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)\\&=47+36+21=104\end{aligned}$$

답 104

서 술 형

• 풀이 과정에 점수가 부여되니 풀이 과정 및 정답을 상세하게 서술하세요.

034

두 다항식 $A=x^2+x-1$, $B=x^2-x+2$에 대하여

$$(A-B)(A+B)^3$$

의 전개식에서 x^3의 계수를 구하시오.

$A-B=(x^2+x-1)-(x^2-x+2)=2x-3$

$A+B=(x^2+x-1)+(x^2-x+2)=2x^2+1$

이고 [30%]

이를 $(A-B)(A+B)^3$에 대입하면

$$(A-B)(A+B)^3=(2x-3)(2x^2+1)^3$$
$$=(2x-3)(8x^6+12x^4+6x^2+1)$$

이다. [40%]

이때 $(2x-3)(8x^6+12x^4+6x^2+1)$의 전개식에서 x^3항은 $2x\cdot 6x^2=12x^3$이므로

구하는 x^3의 계수는 12이다. [30%]

답 12

035

$x=2+\sqrt{5}$일 때, 다항식

$$x^4-6x^3+12x^2-15x+2$$

의 값을 구하시오.

$x=2+\sqrt{5}$에서 $x-2=\sqrt{5}$이다. 이 식의 양변을 제곱하면

$$(x-2)^2=(\sqrt{5})^2 \Rightarrow x^2-4x-1=0 \quad \cdots ㉠$$

이다. [30%]

다항식 $x^4-6x^3+12x^2-15x+2$를 다항식 x^2-4x-1로 나누면 몫이 x^2-2x+5이고 나머지가 $3x+7$이므로

$$x^4-6x^3+12x^2-15x+2$$
$$=(x^2-4x-1)(x^2-2x+5)+3x+7 \quad \cdots ㉡$$

$$\begin{array}{r} x^2-2x+5 \\ x^2-4x-1\overline{)\,x^4-6x^3+12x^2-15x+2} \\ \underline{x^4-4x^3-x^2} \\ -2x^3+13x^2-15x \\ \underline{-2x^3+8x^2+2x} \\ 5x^2-17x+2 \\ \underline{5x^2-20x-5} \\ 3x+7 \end{array}$$

이다. [40%]

㉠에서 $x^2-4x-1=0$이므로 ㉡에 $x=2+\sqrt{5}$를 대입하면

$$x^4-6x^3+12x^2-15x+2=(x^2-4x-1)(x^2-2x+5)+3x+7$$
$$=3x+7=3(2+\sqrt{5})+7$$
$$=13+3\sqrt{5}$$

이다. [30%]

답 $13+3\sqrt{5}$

036 단계형

세 실수 a, b, c에 대하여

$$a+b+c=2, \quad ab+bc+ca=-1, \quad abc=-1$$

일 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$의 값을 구하시오.

(2) $a^3+b^3+c^3$의 값을 구하시오.

(3) $a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3$의 값을 구하시오.

(4) $(a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3)$의 값을 구하시오.

(1) $ab+bc+ca=-1$에서 등식의 좌변을 제곱하여 정리하면

$$(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2(ab^2c+abc^2+a^2bc)$$
$$=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$$
$$=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2\cdot(-1)\cdot 2=1$$

에서 $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=5$이다.

(2) $a+b+c=2$에서 등식의 좌변을 제곱하여 정리하면

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$
$$=a^2+b^2+c^2+2\cdot(-1)=4$$

에서 $a^2+b^2+c^2=6$이다. 따라서 곱셈 공식의 변형에 의하여

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$$
$$=2\cdot(6+1)+3\cdot(-1)=11$$

(3) (1)에서 $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=5$이므로

$$a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3$$
$$=(ab+bc+ca)\{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-abc(a+b+c)\}+3a^2b^2c^2$$
$$=(-1)\cdot(5+2)+3=-4$$

(4) (2)에서 $a^3+b^3+c^3=11$이므로

$$a^3+b^3=11-c^3, \quad b^3+c^3=11-a^3, \quad c^3+a^3=11-b^3$$

이다. 따라서 구하는 값은

$$(a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3)$$
$$=(11-c^3)(11-a^3)(11-b^3)$$
$$=11^3-11^2\cdot(a^3+b^3+c^3)+11\cdot(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)-a^3b^3c^3$$
$$=11^3-11^3+11\cdot(-4)-(-1)^3=-43$$

답 (1) 5 (2) 11 (3) −4 (4) −43

02 항등식과 나머지정리

01 항등식

1. 항등식: 문자의 값에 관계없이 **항상 성립**하는 등식

2. 항등식의 성질

(1) 등식 $ax+b=0$이 x에 대한 항등식이다. $\iff$ $a=0, b=0$

(2) 등식 $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이다. $\iff$ $a=0, b=0, c=0$

(3) 등식 $ax+by+c=0$이 x, y에 대한 항등식이다. $\iff$ $a=0, b=0, c=0$

3. 미정계수법

(1) **수치대입법**: 문자에 적당한 값을 대입하여 미정계수를 구하는 방법

(2) **계수비교법**: 양변에 있는 동류항의 계수를 비교하여 미정계수를 구하는 방법

4. 다항식의 나눗셈과 항등식

x에 대한 다항식 A를 x에 대한 다항식 B로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면

(1) $A=BQ+R$는 x에 대한 항등식이다.

(2) (R의 차수) < (B의 차수)

(3) (B의 차수) + (Q의 차수) = (A의 차수)

02 나머지정리와 인수정리

1. 나머지정리

(1) 다항식 $P(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지는 $P(\alpha)$이다.

(2) 다항식 $P(x)$를 $ax+b\,(a\neq 0)$으로 나누었을 때의 나머지는 $P\left(-\frac{b}{a}\right)$이다.

2. 인수정리: 다항식 $P(x)$가 $x-\alpha$로 나누어떨어진다. $\iff$ $P(\alpha)=0$

03 조립제법

다항식 $P(x)$를 $x-\alpha$로 나눌 때, 계수만 이용하여 몫과 나머지를 구하는 방법

예 다항식 $3x^3-8x^2+5x+1$을 $x-2$로 나눌 때, 다항식의 나눗셈과 조립제법

$$
\begin{array}{r}
3x^2-2x\ +1 \\
x-2\overline{)\,3x^3-8x^2+5x+1} \\
\underline{3x^3-6x^2} \\
-2x^2+5x \\
\underline{-2x^2+4x} \\
x+1 \\
\underline{x-2} \\
3
\end{array}
\quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{몫} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{나머지} \end{array}
$$

〈 다항식의 나눗셈 〉

3 (x^2의 계수)

$-8+2\times 3=-2$ (x의 계수)

$5+2\times(-2)=1$ (상수항)

$1+2\times 1=3$

2	3	−8	5	1
		+	+	+
		6	−4	2
		×2	×2	×2
	3	−2	1	3

〈 조립제법 〉

마·타·노·트

▶ **방정식**

문자의 값에 따라 참이 되기도 하고, 거짓이 되기도 하는 등식

▶ **항등식의 다른 표현들**

1. x의 값에 상관없이 항상 성립하는 등식
2. x의 값에 관계없이 항상 성립하는 등식
3. 모든 x에 대하여 성립하는 등식
4. 임의의 x에 대하여 성립하는 등식
5. x가 어떤 값을 가지더라도 항상 성립하는 등식

▶ **인수정리의 다른 표현들**

1. $P(x)$가 $x-\alpha$로 나누어떨어진다.
2. $x-\alpha$가 $P(x)$의 인수이다.
3. 다항식 $Q(x)$에 대하여 $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$이다.

▶ **조립제법의 응용**

$$
\begin{aligned}
P(x) &= \left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x)+R \\
&= (ax+b)\cdot\frac{1}{a}Q(x)+R
\end{aligned}
$$

037 2009학년도 11월 교육청

개념 01

3이하의 자연수 n에 대하여 A_n을 다음과 같이 정한다.

(가) $A_1=9+99+999$
(나) A_n=(세 수 9, 99, 999에서 서로 다른 $n\,(n\geq 2)$개를 택하여 곱한 수의 총합)

이때, $A_1+A_2+A_3$의 값을 1000으로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

$$(x+9)(x+99)(x+999)=x^3+A_1x^2+A_2x+A_3 \quad \cdots ㉠$$

에서

$$A_1=9+99+999$$
$$A_2=9\times 99+99\times 999+999\times 9$$
$$A_3=9\times 99\times 999$$

이다. ㉠은 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=1$을 대입하면 $10\times 100\times 1000=1+A_1+A_2+A_3$이다. 따라서 $A_1+A_2+A_3=999999$를 1000으로 나누었을 때의 나머지는 999이다.

답 999

038 2017학년도 06월 교육청

개념 02, 03, 04

다음 조건을 만족시키는 모든 이차식 $P(x)$의 합을 $Q(x)$라 하자.

(가) $P(1)P(2)=0$
(나) 사차식 $P(x)\{P(x)-3\}$은 $x(x-3)$으로 나누어떨어진다.

$Q(x)$를 $x-4$로 나눈 나머지를 구하시오.

(i) $P(1)=0$, $P(2)=0$인 경우, $P(x)$는 이차식이므로 조건 (나)에 의하여 $P(0)=3$, $P(3)=3$이다. 따라서 $P(x)=\frac{3}{2}(x-1)(x-2)$이다.
(ii) $P(1)=0$, $P(2)\neq 0$인 경우, $P(x)$는 이차식이므로 조건 (나)에 의하여
 i) $P(0)=0$, $P(3)=3$일 때, $P(1)=0$, $P(0)=0$, $P(3)=3$이므로 $P(x)=\frac{1}{2}x(x-1)$이다.
 ii) $P(0)=3$, $P(3)=0$일 때, $P(1)=0$, $P(0)=3$, $P(3)=0$이므로 $P(x)=(x-1)(x-3)$이다.
 iii) $P(0)=3$, $P(3)=3$일 때, $P(1)=0$, $P(0)=3$, $P(3)=3$이다. 따라서 $P(x)=\frac{3}{2}(x-1)(x-2)$이다. 그런데 $P(2)=0$이므로 모순이다.
(iii) $P(1)\neq 0$, $P(2)=0$인 경우, $P(x)$는 이차식이므로 조건 (나)에 의하여
 i) $P(0)=0$, $P(3)=3$일 때, $P(2)=0$, $P(0)=0$, $P(3)=3$이므로 $P(x)=x(x-2)$이다.
 ii) $P(0)=3$, $P(3)=0$일 때, $P(2)=0$, $P(0)=3$, $P(3)=0$이므로 $P(x)=\frac{1}{2}(x-2)(x-3)$이다.
 iii) $P(0)=3$, $P(3)=3$일 때, $P(2)=0$, $P(0)=3$, $P(3)=3$이다. 따라서 $P(x)=\frac{3}{2}(x-1)(x-2)$이다. 그런데 $P(1)=0$이므로 모순이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여

$$Q(x)=\frac{3}{2}(x-1)(x-2)+\frac{1}{2}x(x-1)$$
$$+(x-1)(x-3)+x(x-2)+\frac{1}{2}(x-2)(x-3)$$

이다. 즉 $Q(x)$를 $x-4$로 나눈 나머지는 나머지정리에 의하여 $Q(4)=27$이다.

답 27

039 2017학년도 11월 교육청

개념 01, 02

최고차항의 계수가 1인 이차식 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하고, $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면 $Q_1(x)$, $Q_2(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $Q_2(1)=f(2)$
(나) $Q_1(1)+Q_2(1)=6$

$f(3)$의 값을 구하시오.

$f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$, 나머지를 R_1이라 하면

$$f(x)=(x-1)Q_1(x)+R_1 \quad \cdots ㉠$$

이고 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$, 나머지를 R_2라 하면

$$f(x)=(x-2)Q_2(x)+R_2 \quad \cdots ㉡$$

이다. ㉡에 $x=2$를 대입하면 (가)에서 $R_2=f(2)=Q_2(1)$이다.
$f(x)=(x-2)Q_2(x)+Q_2(1)$에 $x=1$을 대입하면 $f(1)=-Q_2(1)+Q_2(1)=0$이다. ㉠에 $x=1$을 대입하면 $f(1)=R_1=0$이다. $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차식이므로 $Q_1(x)=x+a$라 하면 $f(x)=(x-1)(x+a)$이고 $Q_1(1)=1+a$, $f(2)=2+a=Q_2(1)$이므로 (나)에서

$$Q_1(1)+Q_2(1)=(1+a)+(2+a)=2a+3=6$$

이므로 $a=\frac{3}{2}$, $f(x)=(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)$이다. 따라서 구하는 값은 $f(3)=(3-1)\left(3+\frac{3}{2}\right)=9$이다.

답 9

040 2015학년도 06월 교육청

개념 03, 04

삼차식 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=2$
(나) $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나눈 몫과 나머지가 같다.

$f(x)$를 $(x-1)^3$으로 나눈 나머지를 $R(x)$라 하자. $R(0)=R(3)$일 때, $R(5)$의 값을 구하시오.

조건 (가)에 의하여

$$f(x)=(x-1)^2(ax+b)+(ax+b) \quad \cdots ㉠$$

이다. 또한 $f(1)=2$이므로 $ax+b=a(x-1)+2$이고 ㉠에 대입하여 정리하면

$$f(x)=(x-1)^2\{a(x-1)+2\}+a(x-1)+2$$
$$=a(x-1)^3+2(x-1)^2+a(x-1)+2$$

이다. 그러므로 $f(x)$를 $(x-1)^3$으로 나눈 나머지는

$$R(x)=2(x-1)^2+a(x-1)+2$$

이고 $R(0)=R(3)$이므로

$$2-a+2=8+2a+2 \quad \Rightarrow \quad a=-2$$

이다. 따라서

$$R(x)=2(x-1)^2-2(x-1)+2$$

이므로 구하는 값은 $R(5)=26$이다.

답 26

개념치료

개념

01. 항등식의 성질과 미정계수법

041 중요

모든 실수 x에 대하여 등식

$$(1+x+x^2+x^3)^4=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{12}x^{12}$$

이 성립할 때, $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{12}$의 값을 구하시오.

(단, a_0, a_1, a_2, …, a_{12}는 상수이다.)

주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=1$, $x=-1$을 차례로 대입하면

$x=1$을 대입 $\Rightarrow$ $256=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{11}+a_{12}$ … ㉠

$x=-1$을 대입 $\Rightarrow$ $0=a_0-a_1+a_2-\cdots-a_{11}+a_{12}$ … ㉡

이다. ㉠+㉡을 하면

$$256=2(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{12})$$

이므로 구하는 값은 128이다.

답 128

042

상수 a, b에 대하여 $\dfrac{ax-3y+3}{2x+by+1}$의 값이 x, y의 값에 관계없이 항상 일정할 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, $2x+by+1\neq0$)

$\dfrac{ax-3y+3}{2x+by+1}=k$ (단, k는 상수)라 하고 x, y에 대하여 정리하면

$$ax-3y+3=2kx+bky+k=0$$

$$\Rightarrow(2k-a)x+(bk+3)y+k-3=0$$

이다. 이 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$$2k-a=0,\quad bk+3=0,\quad k-3=0$$

에서 $k=3$, $a=6$, $b=-1$이고 구하는 값은 $a+b=5$이다.

답 5

043

등식 $ax^3+b(x+1)(x-1)+3(x-1)=3x^3-4x^2+(c-1)x+d$가 x에 대한 항등식이 되도록 하는 상수 a, b, c, d에 대하여 $a+b+c+d$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

등식의 좌변을 전개한 후 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$ax^3+b(x^2-1)+3x-3=ax^3+bx^2+3x-b-3$$

이므로

$$ax^3+bx^2+3x-b-3=3x^3-4x^2+(c-1)x+d$$

이다. 이 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변의 동류항의 계수를 비교하면

$$a=3,\quad b=-4,\quad 3=c-1,\quad -b-3=d$$

이므로 $a=3$, $b=-4$, $c=4$, $d=1$이고 구하는 값은 $a+b+c+d=4$이다.

답 ④

044 중요

등식 $4x^2-3x+6=a(x+1)(x-2)+b(x+1)+c$가 x에 대한 항등식일 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14

④ 16 ⑤ 18

우선 최고차항의 계수를 비교하면 $a=4$이다. 주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=-1$, $x=2$를 차례로 대입하면

$x=-1$을 대입 $\Rightarrow$ $c=13$ … ㉠

$x=2$를 대입 $\Rightarrow$ $3b+c=16$ … ㉡

이다. 따라서 ㉠, ㉡에 의하여 $b=1$, $c=13$이고 구하는 값은 $a+b+c=4+1+13=18$이다.

답 ⑤

045

다항식 $P(x)$에 대하여

$$(x^6-1)P(x)=x^{12}+ax^9+b$$

가 항등식일 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하시오.

$x^6-1=(x^3+1)(x^3-1)$이므로

$$(x^3+1)(x^3-1)P(x)=x^{12}+ax^9+b$$ … ㉠

이다. 이 등식이 x에 대한 항등식이므로 ㉠에 $x^3=-1$, $x^3=1$을 차례로 대입하면

$x^3=-1$을 대입 $\Rightarrow$ $0=1-a+b$ … ㉡

$x^3=1$을 대입 $\Rightarrow$ $0=1+a+b$ … ㉢

에서 ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=-1$이다.

답 $a=0$, $b=-1$

개념

02. 다항식의 나눗셈과 항등식

046 중요

다항식 x^4-4x^3을 x^n-1로 나누었을 때의 몫과 나머지가 서로 같을 때, 자연수 n과 몫을 각각 구하시오.

다항식 x^4-4x^3을 x^n-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라 하면

$$x^4-4x^3=(x^n-1)Q(x)+R(x)$$

이고, $n\leq2$일 때, $Q(x)$의 차수가 2 이상이고, $R(x)$의 차수가 1 이하이므로 $Q(x)\neq R(x)$이다.

(i) $n=3$일 때, $Q(x)=x+a$ (단, a는 상수)라 하면, $R(x)=x+a$이므로

$$x^4-4x^3=(x^3-1)(x+a)+x+a$$

$$=x^4+ax^3$$

에서 $a=-4$이다. 따라서 $Q(x)=x-4$이다.

(ii) $n=4$일 때, $Q(x)=a$ (단, a는 상수)라 하면, $R(x)=a$에서

$$x^4-4x^3=(x^4-1)a+a=ax^4$$

이므로 조건을 만족하는 a는 존재하지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 $n=3$, $Q(x)=x-4$이다.

답 $n=3$, $Q(x)=x-4$

047

다항식 $P(x)=2x^4-3x^3+2x-1$을 다항식 A로 나누었을 때의 몫이 $2x^2-7x+8$이고 나머지가 $7x-25$일 때, 다항식 A를 구하시오.

$P(x)$를 다항식 A로 나누었을 때의 몫이 이차식이므로 A는 이차식이고 $P(x)$의 최고차항의 계수가 2이므로 $A=x^2+ax+b$ (단, a, b는 상수)로 놓을 수 있다. 다항식의 나눗셈으로 나타내면

$$\begin{aligned}P(x)&=A(2x^2-7x+8)+7x-25\\&=(x^2+ax+b)(2x^2-7x+8)+7x-25\\&=2x^4+(2a-7)x^3+(8-7a+2b)x^2+(8a-7b+7)x+8b-25\end{aligned}$$

이다. 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면

$$2a-7=-3,\quad 7a-2b=8,\quad 8a-7b=-5,\quad 8b-25=-1$$

이고 연립하여 풀면 $a=2$, $b=3$이므로 구하는 다항식은 $A=x^2+2x+3$이다.

답 x^2+2x+3

048

x에 대한 다항식 x^3+2x^2+px-3을 x^2+x+q로 나누었을 때의 나머지가 $5x+4$일 때, 상수 p, q에 대하여 pq의 값을 구하시오.

$P(x)=x^3+2x^2+px-3$이라 하면 $P(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 $P(x)$를 x^2+x+q로 나누었을 때의 몫을 $x+b$ (단, b는 상수)로 놓을 수 있다. 다항식의 나눗셈으로 나타내면

$$\begin{aligned}x^3+2x^2+px-3&=(x^2+x+q)(x+b)+5x+4\\&=x^3+(b+1)x^2+(b+q+5)x+bq+4\end{aligned}$$

이다. 이 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면

$$b+1=2,\quad b+q+5=p,\quad bq+4=-3$$

에서 $b=1$, $p=-1$, $q=-7$이므로 구하는 값은 $pq=7$이다.

답 7

049 중요

x에 대한 다항식 $x^3-ax^2-(b+2)x+b^2-3$을 $(x-a)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $-2x-3$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. (단, $a\neq 0$)

주어진 다항식을 $(x-a)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$$x^3-ax^2-(b+2)x+b^2-3=(x-a)^2Q(x)-2x-3$$

$$\Rightarrow\quad x^3-ax^2-bx+b^2=(x-a)^2Q(x)\qquad\cdots\ ㉠$$

이다. ㉠의 양변에 $x=a$를 대입하면

$$a^3-a^3-ba+b^2=0\quad\Rightarrow\quad b^2=ab\qquad\cdots\ ㉡$$

한편, ㉠에 ㉡을 대입하면

$$x^3-ax^2-bx+ab=(x-a)^2Q(x)$$

$$\Rightarrow\quad x^2(x-a)-b(x-a)=(x-a)^2Q(x)$$

에서 양변을 $x-a$로 나누면 $x^2-b=(x-a)Q(x)$이다. 이 식이 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=a$를 대입하면

$$a^2-b=0\qquad\cdots\ ㉢$$

이다. ㉡에서 $b^2-ab=0\quad\Rightarrow\quad b(b-a)=0$이므로

(i) $b=0$인 경우, ㉢에 대입하면 $a=0$이므로 조건에 부합하지 않는다.

(ii) $b=a$인 경우, ㉢에 대입하면 $a^2-a=a(a-1)=0$에서 $a=b=1$이다.

(i), (ii)에 의하여 $a=1$, $b=1$이고 구하는 값은 $a+b=2$이다.

답 2

개념

03. 나머지정리

050

두 다항식 $P(x)$, $Q(x)$에 대하여 $P(x)+Q(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 5이고, $P(x)-Q(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 3일 때 다항식 $P(x)Q(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

나머지정리에 의하여

$$P(3)+Q(3)=5\qquad\cdots\ ㉠$$

$$P(3)-Q(3)=3\qquad\cdots\ ㉡$$

이므로 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $P(3)=4$, $Q(3)=1$이다. 따라서 다항식 $P(x)Q(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는 $P(3)Q(3)=4\cdot 1=4$이다.

답 4

051 중요

다항식 $P(x)$가 $(x+3)^2$으로 나누어떨어지고 다항식 $P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 8일 때, 다항식 $P(x)$를 $(x+3)^2(x+1)$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

다항식 $P(x)$를 $(x+3)^2(x+1)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (단, a, b, c는 상수)라 하면

$$P(x)=(x+3)^2(x+1)Q(x)+ax^2+bx+c$$

이다. $P(x)$가 $(x+3)^2$으로 나누어떨어지므로 $ax^2+bx+c=a(x+3)^2$으로 놓을 수 있다. 따라서

$$P(x)=(x+3)^2(x+1)Q(x)+a(x+3)^2\qquad\cdots\ ㉠$$

이고 ㉠에서 나머지정리에 의하여 $P(-1)=8$이므로

$$P(-1)=a(-1+3)^2=4a=8$$

이므로 $a=2$이다. 따라서 구하는 나머지는

$$ax^2+bx+c=2(x+3)^2=2x^2+12x+18$$

답 $2x^2+12x+18$

052

다항식 $x^9+x^7+x^5+x^3+x$를 $x(x+1)(x-1)$로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

$P(x)=x^9+x^7+x^5+x^3+x$로 놓고 $P(x)$를 $x(x+1)(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$라 하면

$$P(x)=x(x+1)(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c$$

이다. $x=0$, $x=-1$, $x=1$을 각각 대입하면

$$c=0,\quad a-b=-5,\quad a+b=5$$

에서 $a=0$, $b=5$, $c=0$이므로 $R(x)=5x$이다. 따라서 구하는 값은 나머지정리에 의하여 $R(3)=15$이다.

답 15

053

다항식 $P(x)$를 $x-2$, x^2+x+6, $(x-2)(x^2+x+6)$으로 나누었을 때의 나머지가 각각 9, $ax+b$, $(x-c)^2$이라 한다. 이때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은? (단, $c>0$)

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

나머지정리에 의하여 $P(2)=9$이고, $P(x)$를 x^2+x+6과 $(x-2)(x^2+x+6)$으로 나누었을 때의 몫을 각각 $Q(x)$, $Q'(x)$라 하면

$$P(x)=(x^2+x+6)Q(x)+ax+b \quad \cdots ㉠$$

$$P(x)=(x-2)(x^2+x+6)Q'(x)+(x-c)^2 \quad \cdots ㉡$$

이라 놓을 수 있다. $P(2)=9$를 ㉡에 대입하면

$$(2-c)^2=9 \quad \Rightarrow \quad 2-c=\pm 3$$

에서 $c>0$이므로 $c=5$이다. 또한, ㉠, ㉡에서 $(x-5)^2$을 x^2+x+6으로 나누었을 때의 나머지가 $ax+b$이다. 따라서

$$(x-5)^2=x^2-10x+25=(x^2+x+6)+ax+b$$

에서 $a=-11$, $b=19$, $c=5$이므로 구하는 값은 $a+b+c=13$이다.

054

답 ③

다항식 $P(x)$를 x^2-x+1로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 $x+5$이고, $Q(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 3이다. $P(x)$를 x^3+1로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(1)$의 값을 구하시오.

다항식 $P(x)$를 나눗셈의 관계식으로 나타내면

$$P(x)=(x^2-x+1)Q(x)+x+5 \quad \cdots ㉠$$

이고 $Q(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$라 하면

$$Q(x)=(x+1)Q'(x)+3 \quad \cdots ㉡$$

이고 ㉠을 ㉡에 대입하면

$$P(x)=(x^2-x+1)\{(x+1)Q'(x)+3\}+x+5$$

$$=(x^3+1)Q'(x)+3x^2-2x+8$$

이다. 다항식 $P(x)$를 x^3+1로 나누었을 때의 나머지는 $R(x)=3x^2-2x+8$이므로 구하는 값은 $R(1)=9$이다.

055 상위 1%

답 9

다항식 $f(x)$를 $(x-1)^3$으로 나누었을 때의 나머지는 x^2+x+1이고, $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 나머지는 $4x+3$이다. 이때, 다항식 $f(x)$를 $(x-1)^2(x-2)$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

다항식 $f(x)$를 $(x-1)^3$으로 나누었을 때의 몫을 $A(x)$라 하고, $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $B(x)$라 하면

$$f(x)=(x-1)^3A(x)+x^2+x+1 \quad \cdots ㉠$$

$$=(x-2)^2B(x)+4x+3 \quad \cdots ㉡$$

이므로 ㉠에서 $f(1)=3$이고 ㉡에서 $f(2)=11$이다. 다항식 $f(x)$를 $(x-1)^2(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하고 나머지를 px^2+qx+r라 하면

$$f(x)=(x-1)^2(x-2)Q(x)+px^2+qx+r \quad \cdots ㉢$$

이다. 한편, ㉠을 변형하면 $f(x)=(x-1)^2\{(x-1)A(x)+1\}+3x$에서 다항식 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지는 $3x$이다. 따라서 ㉢에서

$$f(x)=(x-1)^2(x-2)Q(x)+p(x-1)^2+3x$$

이다. 이때, $f(2)=11$이므로 $p+6=11$에서 $p=5$이다. 따라서 구하는 나머지는 $5(x-1)^2+3x=5x^2-7x+5$이다.

답 $5x^2-7x+5$

056

13×7^{13}을 48로 나누었을 때의 나머지는?

① 3 ② 13 ③ 23
④ 33 ⑤ 43

13×7^{13}은 $13\times 7\times (7^2)^6=91\times 49^6$이므로 $49=x$라 하면

$$13\times 7^{13}=91\times 49^6=91x^6$$

이다. 이제 다항식 $P(x)=91x^6$에 대하여

$$P(49)=13\times 7^{13}, \quad P(1)=91$$

이다. 다항식 $P(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지정리에 의하여 $P(x)=(x-1)Q(x)+91$이다. 이 식의 양변에 49를 대입하면

$$P(49)=48\cdot Q(49)+91=48\{Q(49)+1\}+43$$

이므로 구하는 나머지는 43이다.

답 ⑤

개념

04. 인수정리

057

다항식 $P(x)=x^3+a$가 $x-2$로 나누어떨어질 때의 몫을 $Q(x)$라 할 때, $Q(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

인수정리에 의하여 $P(2)=0$이므로

$$P(2)=2^3+a=0$$

에서 $a=-8$이다. $P(x)=x^3-8$이므로

$$P(x)=x^3-8=(x-2)Q(x) \quad \cdots ㉠$$

이다. $Q(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는 $Q(3)$과 같으므로 ㉠에 $x=3$을 대입하면

$$P(3)=27-8=Q(3)$$

에서 구하는 값은 $Q(3)=19$이다.

답 19

058 중요

x^4의 계수가 1인 사차식 $P(x)$에 대하여 $P(x)$를 $x-1$, $x-2$, $x-3$, $x-4$로 나누었을 때의 나머지가 각각 -2, -4, -6, -8일 때, $P(x)$를 $x-5$로 나누었을 때의 나머지는?

① -14 ② -10 ③ 4
④ 10 ⑤ 14

나머지정리에 의하여

$$P(1)=-2, \quad P(2)=-4, \quad P(3)=-6, \quad P(4)=-8$$

이므로 $P(1)+2=P(2)+4=P(3)+6=P(4)+8=0$에서 $P(x)+2x$는 $x-1$, $x-2$, $x-3$, $x-4$로 나누어떨어진다. 따라서 x^4의 계수가 1이므로

$$P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)-2x$$

로 나타낼 수 있고, $P(x)$를 $x-5$로 나누었을 때의 나머지는 $P(5)$이므로 구하는 값은 $P(5)=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1-10=14$이다.

답 ⑤

059

다항식 $2x^3-4x^2+ax+b$가 x^2-x-6으로 나누어떨어질 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

$P(x)=2x^3-4x^2+ax+b$라 하면 $P(x)$를 x^2-x-6으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$$P(x)=(x^2-x-6)Q(x)=(x+2)(x-3)Q(x)$$

이므로 $P(-2)=P(3)=0$이다. 따라서

$$P(-2)=-16-16-2a+b=0 \Rightarrow -2a+b=32 \quad \cdots ㉠$$

$$P(3)=54-36+3a+b=0 \Rightarrow 3a+b=-18 \quad \cdots ㉡$$

이고, ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-10$, $b=12$이다. 따라서 구하는 값은 $a+b=2$이다.

답 ②

060 중요

다항식 $P(x)+x-3$이 x^2+2x-8로 나누어떨어질 때, 다항식 $P(3x-4)$를 x^2-2x로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

다항식 $P(x)+x-3$을 x^2+2x-8로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$$P(x)+x-3=(x^2+2x-8)Q(x)=(x-2)(x+4)Q(x) \quad \cdots ㉠$$

이다. 다항식 $P(3x-4)$를 x^2-2x로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$, 나머지를 $ax+b$라 하면

$$P(3x-4)=(x^2-2x)Q'(x)+ax+b$$

$$=x(x-2)Q'(x)+ax+b \quad \cdots ㉡$$

이다. ㉠에서 $P(2)=1$, $P(-4)=7$이므로 ㉡에 $x=0$, $x=2$를 차례로 대입하면

$$P(0-4)=b=7, \quad P(6-4)=2a+b=1$$

이고, 두 식을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=7$이므로 구하는 나머지는 $-3x+7$이다.

답 $-3x+7$

061

최고차항의 계수가 각각 1인 두 이차식 $P(x)$, $Q(x)$에 대하여 $P(2)=Q(2)=0$이고 $P(x)+Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 -3일 때, $P(3)+Q(3)$의 값을 구하시오.

최고차항의 계수가 각각 1인 이차식 $P(x)$, $Q(x)$에 대하여 $P(2)=Q(2)=0$이므로 $P(x)$, $Q(x)$는 $x-2$를 각각 인수로 가진다. 따라서

$$P(x)=(x-2)(x+a), \quad Q(x)=(x-2)(x+b)$$

(단, a, b는 상수)로 나타낼 수 있다. 다항식 $P(x)+Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 -3이므로 나머지정리에 의하여 $P(1)+Q(1)=-3$이다.

$$P(1)+Q(1)=(1-2)(1+a)+(1-2)(1+b)$$

$$=-a-b-2=-3$$

에서 $a+b=1$이므로 구하는 $P(3)+Q(3)$의 값은 다음과 같다.

$$P(3)+Q(3)=(3-2)(3+a)+(3-2)(3+b)$$

$$=a+b+6=7$$

답 7

개념

05. 조립제법

062 중요

다항식 x^3+ax^2+bx-3이 $(x-1)^2$으로 나누어떨어질 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하시오.

다항식 x^3+ax^2+bx-3을 $x-1$로 두 번 반복하여 나누면

1	1	a	b	-3
		1	$a+1$	$a+b+1$
1	1	$a+1$	$a+b+1$	$a+b-2$
		1	$a+2$	
	1	$a+2$	$2a+b+3$	

이므로

$$x^3+ax^2+bx-3=(x-1)^2(x+a+2)+(2a+b+3)(x-1)+a+b-2$$

이다. 이 식이 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지므로

$$2a+b+3=0, \quad a+b-2=0$$

이고 두 식을 연립하여 풀면 $a=-5$, $b=7$이다.

답 $a=-5$, $b=7$

063

다항식 x^4-2x^2+4x+2를 일차식 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 할 때, $Q(x)$를 일차식 $x+2$로 나눈 몫을 구하시오.

다항식 x^4-2x^2+4x+2를 일차식 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 일차식 $x+2$로 나누는 과정을 조립제법을 이용하여 나타내면 다음과 같다.

1	1	0	-2	4	2
		1	1	-1	3
-2	1	1	-1	3	5
		-2	2	-2	
	1	-1	1	1	

따라서

$$x^4-2x^2+4x+2=(x-1)(x^3+x^2-x+3)+5$$

에서 $Q(x)=x^3+x^2-x+3$이고

$$x^3+x^2-x+3=(x+2)(x^2-x+1)+1$$

이므로 구하는 몫은 x^2-x+1이다.

답 x^2-x+1

064 상위 1%

임의의 실수 x에 대하여 등식

$$27x^3-9x^2+9x+1=a(3x-1)^3+b(3x-1)^2+c(3x-1)+d$$

가 성립할 때, 상수 a, b, c, d에 대하여 $abcd$의 값을 구하시오.

다항식 $27x^3-6x^2+5x+2$를 일차식 $x-\frac{1}{3}$로 반복하여 나누면

$\frac{1}{3}$	27	-9	9	1
		9	0	3
$\frac{1}{3}$	27	0	9	4
		9	3	
$\frac{1}{3}$	27	9	12	
		9		
	27	18		

이다. 따라서 $27x^3-9x^2+9x+1$은

$$27x^3-9x^2+9x+1=27\left(x-\frac{1}{3}\right)^3+18\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+12\left(x-\frac{1}{3}\right)+4$$

$$=(3x-1)^3+2(3x-1)^2+4(3x-1)+4$$

에서 $a=1$, $b=2$, $c=4$, $d=4$이므로 구하는 값은 $abcd=32$이다.

답 32

065

다항식 $P(x)$를 $x-1$, $(x-1)^2$으로 각각 나누었을 때의 나머지의 합이 $x+1$이고 $(x-1)^3$으로 나누었을 때의 나머지가 ax^2+bx+c일 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하시오.

다항식 $P(x)$를 $x-1$, $(x-1)^2$, $(x-1)^3$으로 나누었을 때의 몫과 나머지를 각각

$$Q_1(x),\ Q_2(x),\ Q_3(x),\quad R_1,\ R_2(x),\ ax^2+bx+c$$

라 하면

$$P(x)=(x-1)Q_1(x)+R_1 \quad \cdots ㉠$$

$$P(x)=(x-1)^2Q_2(x)+R_2(x) \quad \cdots ㉡$$

$$P(x)=(x-1)^3Q_3(x)+ax^2+bx+c \quad \cdots ㉢$$

이다. $R_1+R_2(x)=x+1$이므로 ㉠과 ㉡을 변끼리 더했을 때

$$2P(x)=(x-1)Q_1(x)+R_1+(x-1)^2Q_2(x)+R_2(x)$$

$$\Rightarrow\quad P(x)=\frac{1}{2}(x-1)Q_1(x)+\frac{1}{2}(x-1)^2Q_2(x)+\frac{1}{2}(x+1) \quad \cdots ㉣$$

에서 ㉢과 ㉣은 같은 식이므로 ㉢과 ㉣에 $x=1$을 대입하면

$a+b+c=\frac{1}{2}\cdot(1+1)=1$이다. 따라서 구하는 값은 $a+b+c=1$이다.

066

답 1

이차식 $P(x)$에 대하여 다항식 $P(1-x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 7이고, 다항식 $xP(x)-x$는 x^2-1로 나누어떨어진다고 한다. 이때, $P(5)$의 값을 구하시오.

다항식 $P(1-x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하고, 다항식 $xP(x)-x$를 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$라 하면

$$P(1-x)=(x-3)Q(x)+7 \quad \cdots ㉠$$

$$xP(x)-x=(x^2-1)Q'(x) \quad \cdots ㉡$$

이다. ㉡에 $x=1$, $x=-1$을 각각 대입하면 $P(1)-1=0$, $P(-1)-1=0$이므로

$$P(x)-1=a(x+1)(x-1)\quad\Rightarrow\quad P(x)=a(x-1)(x+1)+1 \quad \cdots ㉢$$

이다. ㉠에 $x=3$을 대입하면 $P(-2)=7$이므로 ㉢에 $x=-2$를 대입하면

$$P(-2)=a\cdot(-1)\cdot(-3)+1=7$$

이고 $a=2$이다. 따라서 $P(x)=2(x+1)(x-1)+1$이고 구하는 값은 $P(5)=2\cdot6\cdot4+1=49$이다.

답 49

067 마

다항식 x^{50}을 $\frac{1}{2}x-1$로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$라 할 때, $Q(x)$의 상수항을 제외한 모든 계수의 합을 구하시오.

문제의 조건으로부터 나머지를 R라 할 때,

$$x^{50}=\left(\frac{1}{2}x-1\right)Q(x)+R \quad \cdots ㉠$$

이다. ㉠에 $x=2$를 대입하면

$$2^{50}=R$$

이다. 한편 $Q(1)$은 $Q(x)$의 모든 계수의 합이고 $Q(0)$은 $Q(x)$의 상수항과 같다. ㉠에 $x=1$, 0을 각각 대입하면

$$x=1\text{을 대입}\quad\Rightarrow\quad 1=-\frac{1}{2}Q(1)+2^{50} \quad \cdots ㉡$$

$$x=0\text{을 대입}\quad\Rightarrow\quad 0=-Q(0)+2^{50} \quad \cdots ㉢$$

이므로 ㉡, ㉢에 의하여 $Q(1)=2^{51}-2$, $Q(0)=2^{50}$이고 구하는 값은 $Q(1)-Q(0)=2^{51}-2-2^{50}=2^{50}-2$이다.

답 $2^{50}-2$

068

모든 실수 x에 대하여 등식

$$x^{2018}+5=a_0+a_1(x+1)+a_2(x+1)^2+\cdots+a_{2018}(x+1)^{2018}$$

이 성립할 때, 옳은 것만을 **[보기]**에서 있는 대로 고르시오.

(단, a_0, a_1, …, a_{2018}은 상수이다.)

[보기]

ㄱ. $a_{2018}=1$

ㄴ. $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{2018}<a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2017}$

ㄷ. $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{2018}=2^{2017}+5$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄴ, ㄷ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. (참) 주어진 등식에서 x^{2018}의 계수가 같아야 하므로 $a_{2018}=1$이다.

ㄴ. (거짓) 주어진 등식의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$$a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_{2017}+a_{2018}=2^{2018}+5$$

에서 $(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{2018})-(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2017})>0$이므로

$a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{2018}>a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2017}$이다.

ㄷ. (참) 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면 $5=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2018}$이고 ㄴ에서 $a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_{2017}+a_{2018}=2^{2018}+5$이므로 두 식을 변끼리 더하면 $2(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{2018})=2^{2018}+10$에서

$a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{2018}=2^{2017}+5$이다.

답 ④

069

다항식 $P(x)$를 $(x+2)(x-1)$로 나누었을 때의 나머지가 16이고 x^2+2x+2로 나누었을 때의 나머지가 $-11x+2$이다. $P(x)$를 $(x+2)(x-1)(x^2+2x+2)$로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(0)$의 값을 구하시오.

다항식 $P(x)$를 $(x+2)(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $A(x)$, x^2+2x+2로 나누었을 때의 몫을 $B(x)$, $(x+2)(x-1)(x^2+2x+2)$으로 나누었을 때의 몫을 $C(x)$라 하고, $R(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (단, a, b, c, d는 상수)라 하면

$$P(x)=(x+2)(x-1)A(x)+16 \quad \cdots ㉠$$

$$=(x^2+2x+2)B(x)-11x+2 \quad \cdots ㉡$$

$$=(x+2)(x-1)(x^2+2x+2)C(x)+ax^3+bx^2+cx+d \quad \cdots ㉢$$

이다. ㉡에서 $P(x)$는 x^2+2x+2로 나누었을 때의 나머지가 $-11x+2$이므로 ㉢은

$$P(x)=(x+2)(x-1)(x^2+2x+2)C(x)$$

$$+(ax+b')(x^2+2x+2)-11x+2$$

(단, b'은 상수)이다. ㉠에서 $P(1)=16$, $P(-2)=16$이므로

$$5(a+b')=25\quad\Rightarrow\quad a+b'=5 \quad \cdots ㉣$$

$$2(-2a+b')=-8\quad\Rightarrow\quad -2a+b'=-4 \quad \cdots ㉤$$

이다. ㉣과 ㉤을 연립하여 풀면 $a=3$, $b'=2$이다. 따라서

$$R(x)=(3x+2)(x^2+2x+2)-11x+2$$

이고 구하는 값은 $R(0)=6$이다.

답 6

서 술 형

• 풀이 과정에 점수가 부여되니 풀이 과정 및 정답을 상세하게 서술하세요.

070

다항식 $P(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $P(x)$를 $(x-2)(x^2+x)$로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 하자. $R(3)$의 값을 구하시오.

(가) $(x+1)P(x-1)$을 $x-3$으로 나눈 나머지가 12이다.
(나) $(x+2)P(x)-6$은 x, $x+1$로 나누어떨어진다.

다항식 $P(x)$를 $(x-2)(x^2+x)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$ (단, a, b, c는 상수)라 하면

$$P(x)=(x-2)(x^2+x)Q(x)+ax^2+bx+c$$
$$=x(x+1)(x-2)Q(x)+ax^2+bx+c \quad \cdots ㉠$$

이다. [30%]

조건 (가)에서 나머지정리에 의하여 $4P(2)=12$에서 $P(2)=3$이다. 따라서 ㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$$P(2)=4a+2b+c=3 \quad \cdots ㉡$$

이다. [30%]

조건 (나)에서 인수정리에 의하여 $2P(0)-6=0$, $P(-1)-6=0$이므로 $P(0)=3$, $P(-1)=6$이다. 따라서 ㉠의 양변에 $x=0$, -1을 각각 대입하면

$$P(0)=c=3 \quad \cdots ㉢$$
$$P(-1)=a-b+c=6 \quad \cdots ㉣$$

에서 ㉡, ㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-2$, $c=3$이다. 따라서 $R(x)=x^2-2x+3$이고 구하는 값은 $R(3)=9-6+3=6$이다. [40%]

답 6

071

사차식 $P(x)$가

$$P(0)=2,\quad P(1)=\frac{3}{2},\quad P(2)=\frac{4}{3},\quad P(3)=\frac{5}{4}$$

를 만족할 때, 다항식 $P(x)$를 $x-4$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

문제의 조건으로부터

$$P(0)-2=0,\quad 2P(1)-3=0,\quad 3P(2)-4=0,\quad 4P(3)-5=0$$

이므로 $Q(x)=(x+1)P(x)-x-2$라 놓으면 $Q(x)$는 사차식이고

$$Q(0)=Q(1)=Q(2)=Q(3)=0$$

이다. [30%]

따라서 인수정리에 의하여 다항식 $Q(x)$는 x, $x-1$, $x-2$, $x-3$을 인수로 가지므로

$$Q(x)=ax(x-1)(x-2)(x-3)$$

(단, $a\neq0$인 상수)로 놓을 수 있다. 즉,

$$(x+1)P(x)-x-2=ax(x-1)(x-2)(x-3) \quad \cdots ㉠$$

이므로 [30%]

양변에 $x=-1$을 대입하면

$$-1=a\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)=24a$$

에서 $a=-\frac{1}{24}$이다. [20%]

따라서 나머지정리에 의하여 다항식 $P(x)$를 $x-4$로 나누었을 때의 나머지는 $P(4)$이므로 ㉠에 $x=4$를 대입하면

$$5P(4)-6=-\frac{1}{24}\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=-1$$

에서 $P(4)=1$이다. [20%]

답 1

072 단계형

다항식 $P(x)=x^3-2x^2-x+5$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) 다항식 $P(x)$를 일차식 $x-2$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

(2) $P(x)=a(x-2)^3+b(x-2)^2+c(x-2)+d$로 나타낼 때, 상수 a, b, c, d에 대하여 $a+b+c+d$의 값을 구하시오.

(3) $P(12)$의 값을 구하시오.

(1) 다항식 $P(x)$를 일차식 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여 $P(2)=8-8-2+5=3$이다.

(2) 다항식 $P(x)$를 일차식 $x-2$로 반복하여 나누는 과정을 조립제법을 이용하여 나타내면

2	1	−2	−1	5
		2	0	−2
2	1	0	−1	3
		2	4	
2	1	2	3	
		2		
	1	4		

이므로

$$P(x)=x^3-2x^2-x+5$$
$$=(x-2)[(x-2)\{(x-2)\cdot1+4\}+3]+3$$
$$=(x-2)^3+4(x-2)^2+3(x-2)+3$$

으로 나타낼 수 있다. 따라서 $a=1$, $b=4$, $c=3$, $d=3$이므로 구하는 값은 $a+b+c+d=11$이다.

(3) $P(x)=(x-2)^3+4(x-2)^2+3(x-2)+3$이므로

$$P(12)=10^3+4\times10^2+3\times10+3$$
$$=1000+400+30+3=1433$$

답 (1) 3 (2) 11 (3) 1433

03 인수분해

01 인수분해 공식

1. $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$, $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

2. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

3. $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

4. $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

5. $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$, $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

6. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$, $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

7. $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$

8. $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$

9. $a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

02 복잡한 식의 인수분해

1. **치환**을 이용한 인수분해

(1) 공통부분이 있는 경우: 공통부분을 한 문자로 치환하여 인수분해

(2) 공통부분이 없는 경우: 식을 변형하여 공통부분을 만든 후 공통부분을 한 문자로 치환하여 인수분해

2. **복이차식**

(1) $x^2=X$로 치환하여 인수분해한다.

(2) 이차항을 분리하여 A^2-B^2의 꼴로 만들어서 인수분해한다.

3. **여러 문자**를 포함한 식의 인수분해

(1) 각 문자의 차수가 다른 경우: 차수가 가장 낮은 문자로 내림차순으로 정리 후 인수분해

(2) 각 문자의 차수가 같은 경우: 임의의 한 문자로 내림차순으로 정리 후 인수분해

4. **인수정리**를 이용한 인수분해

단계 1. 다항식 $P(x)$에 대하여 $P(\alpha)=0$이 되는 α의 값을 찾는다.

단계 2. 조립제법을 이용하여 다항식 $P(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 몫 $Q(x)$를 구하여 $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$의 꼴로 만든다.

단계 3. 다항식 $Q(x)$가 더 이상 인수분해 되지 않을 때까지 단계 1, 2를 계속한다.

마·타·노·트

▶ 인수분해

하나의 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱으로 나타내는 것

▶ 인수분해 범위

특별한 조건이 없으면 고등학교 과정에서는 다항식의 인수분해는 계수가 유리수인 범위에서 더 이상 인수분해 할 수 없을 때까지 한다.

▶ 다항식의 전개와 인수분해

$$(a+b)(a-b) \underset{\text{인수분해}}{\overset{\text{전개}}{\rightleftharpoons}} a^2-b^2$$

▶ $P(\alpha)=0$인 α를 찾는 방법

계수가 정수인 다항식 $P(x)$에서 $P(\alpha)=0$을 만족하는 α의 값은 일반적으로

$$\pm\frac{\text{상수항의 양의 약수}}{\text{최고차항의 계수의 양의 약수}}$$

중에서 찾는다.

073 2017학년도 03월 교육청

개념 01

세 다항식 $f(x)=x^2+x$, $g(x)=x^2-2x-1$, $h(x)$에 대하여

$$\{f(x)\}^3+\{g(x)\}^3=(2x^2-x-1)h(x)$$

가 x에 대한 항등식일 때, $h(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는?

① 8 ② 9 ③ 10

④ 11 ⑤ 12

$\{f(x)\}^3+\{g(x)\}^3$을 인수분해하면

$$\begin{aligned}&\{f(x)\}^3+\{g(x)\}^3\\&=\{f(x)+g(x)\}[\{f(x)\}^2-f(x)g(x)+\{g(x)\}^2]\\&=(2x^2-x-1)h(x)\end{aligned}$$

이므로

$$h(x)=\{f(x)\}^2-f(x)g(x)+\{g(x)\}^2$$

이다. 이때 $h(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여 $h(1)$이다.
$f(1)=2$, $g(1)=-2$이므로 구하는 값은

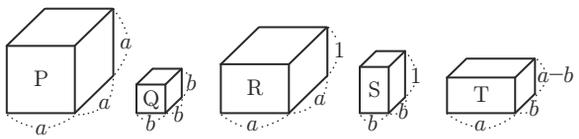
$$h(1)=2^2-2\times(-2)+(-2)^2=12$$

답 ⑤

074 2013학년도 06월 교육청

개념 03

두 양수 a, b $(a>b)$에 대하여 그림과 같은 직육면체 P, Q, R, S, T의 부피를 각각 p, q, r, s, t라 하자.



이때 $p=q+r+s+t$일 때, $a-b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

입체도형 P, Q, R, S, T의 부피가 각각 p, q, r, s, t 이므로

$$p=a^3,\ q=b^2,\ r=a^2,\ s=b^2,\ t=ab(a-b)$$

이고 $p=q+r+s+t$이므로

$$\begin{aligned}&a^3=b^3+a^2+b^2+ab(a-b)\\&a^3-b^3-a^2-b^2-ab(a-b)=0\\&(a-b)(a^2+ab+b^2)-(a^2+b^2)-ab(a-b)=0\\&(a-b)(a^2+b^2)-(a^2+b^2)=0\\&(a-b-1)(a^2+b^2)=0\end{aligned}$$

이다. 이때 $a^2+b^2\neq0$이므로 $a-b-1=0$이고 구하는 값은 $a-b=1$이다.

답 ①

075 2016학년도 03월 교육청

개념 03, 05

두 자연수 a, b에 대하여

$$a^2b+2ab+a^2+2a+b+1$$

의 값이 245일 때, $a+b$의 값은?

① 9 ② 10 ③ 11

④ 12 ⑤ 13

$a^2b+2ab+a^2+2a+b+1$을 b에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해하면

$$\begin{aligned}&(a^2+2a+1)b+a^2+2a+1\\&=(a+1)^2b+(a+1)^2\\&=(a+1)^2(b+1)\end{aligned}$$

이다. 위의 식의 값이 $245=7^2\times5$이므로

$$(a+1)^2(b+1)=7^2\times5$$

이고, a, b는 자연수이므로

$$a+1=7,\quad b+1=5$$

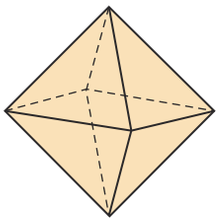
이다. 따라서 $a=6$, $b=4$이므로 구하는 값은 $a+b=10$이다.

답 ②

076 2010학년도 09월 교육청

개념 03, 05

그림과 같이 여덟 개의 정삼각형으로 이루어진 정팔면체가 있다. 여섯 개의 꼭짓점에는 자연수를 적고 여덟 개의 정삼각형의 면에는 각각의 삼각형의 꼭짓점에 적힌 세 수의 곱을 적는다. 여덟 개의 면에 적힌 수들의 합이 105일 때, 여섯 개의 꼭짓점에 적힌 수들의 합을 구하시오.



여섯 개의 꼭짓점에 적힌 자연수를 각각 a, b, c, d, e, f라 하면 여덟 개의 면에 적힌 수들의 합은

$$abc+abe+acd+ade+fbc+fbe+fcd+fde=105$$

이다. $abc+abe+acd+ade+fbc+fbe+fcd+fde$의 공통부분이 나타나도록 정리하여 인수분해하면

$$\begin{aligned}&a(bc+be+cd+de)+f(bc+be+cd+de)\\&=(a+f)(bc+be+cd+de)=(a+f)\{b(c+e)+d(c+e)\}\\&=(a+f)(b+d)(c+e)\end{aligned}$$

이다. 이때, $(a+f)(b+d)(c+e)=105$이고 $105=3\cdot5\cdot7$이므로 구하는 값은 $a+b+c+d+e+f=3+5+7=15$이다.

답 15

개념 치료

개념

01. 인수분해 공식

077
다항식

$$(2x-1)^3-3(2x-1)^2(x-2)+3(2x-1)(x-2)^2-(x-2)^3$$

을 인수분해하시오.

주어진 다항식을 인수분해하면

$$\begin{aligned}&(2x-1)^3-3(2x-1)^2(x-2)+3(2x-1)(x-2)^2-(x-2)^3\\&=\{(2x-1)-(x-2)\}^3=(2x-1-x+2)^3\\&=(x+1)^3\end{aligned}$$

답 $(x+1)^3$

078 중요
$a=\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $b=1-\sqrt{3}$, $c=2-\sqrt{3}$일 때,

$a^2+4b^2+9c^2-4ab-12bc+6ca$의 값을 구하시오.

주어진 식을 인수분해하면

$$\begin{aligned}&a^2+4b^2+9c^2-4ab-12bc+6ca\\&=a^2+(-2b)^2+(3c)^2+2\cdot a\cdot(-2b)+2\cdot(-2b)\cdot 3c+2\cdot 3c\cdot a\\&=(a-2b+3c)^2\end{aligned}$$

이다.

$$a-2b+3c=(\sqrt{2}+\sqrt{3})-2(1-\sqrt{3})+3(2-\sqrt{3})=4+\sqrt{2}$$

이므로 구하는 값은 $(a-2b+3c)^2=(4+\sqrt{2})^2=18+8\sqrt{2}$이다.

답 $18+8\sqrt{2}$

079 상위 1%
2018개의 이차식 x^2-2x-1, x^2-2x-2, …, $x^2-2x-2018$ 중에서 계수가 정수인 두 일차식의 곱으로 인수분해되는 이차식의 개수를 구하시오.

2018개의 이차식을 x^2-2x-n (단, n은 2018 이하의 자연수)라 하자. 다항식 x^2-2x-n은 계수가 정수인 두 일차식의 곱으로 인수분해되므로

$$x^2-2x-n=(x+a)(x-b)$$

(단, a, b는 자연수)이다. 이때, $x^2-2x-n=x^2+(a-b)x-ab$이므로 $b-a=2$, $ab=n$이다. 두 자연수의 차가 2이고 곱이 2018 이하인 자연수의 쌍을 구하면 다음 표와 같다.

a	1	2	3	…	42	43	44	…
b	3	4	5	…	44	45	46	…
ab	3	8	15	…	1848	1935	2024	…

따라서 계수가 정수인 두 일차식의 곱으로 인수분해되는 이차식의 개수는 43이다.

답 43

080
다항식 $16x^4+36x^2y^2+81y^4$을 인수분해하면

$$(ax^2+bx+cy^2)(ax^2-bx+cy^2)$$

일 때, 양수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은?

① 15 ② 19 ③ 23

④ 27 ⑤ 31

주어진 다항식을 인수분해하면

$$\begin{aligned}&16x^4+36x^2y^2+81y^4\\&=(2x)^4+(2x)^2(3y)^2+(3y)^4\\&=\{(2x)^2+2x\cdot 3y+(3y)^2\}\{(2x)^2-2x\cdot 3y+(3y)^2\}\\&=(4x^2+6xy+9y^2)(4x^2-6xy+9y^2)\end{aligned}$$

이다. 계수를 비교하면 $a=4$, $b=6$, $c=9$이므로 구하는 값은 $a+b+c=19$이다.

답 ②

개념

02. 치환을 이용한 인수분해

081
다항식 $(x+1)(x+2)(x^2+3x-3)-6$을 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x^2+cx+d)$일 때, 상수 a, b, c, d에 대하여 $a+b+c+d$의 값을 구하시오.

다항식 $(x+1)(x+2)(x^2+3x-3)-6$의 공통부분이 나타나도록 하면 $(x^2+3x+2)(x^2+3x-3)-6$이고 공통부분을 $x^2+3x=X$로 치환하여 인수분해하면

$$\begin{aligned}&(x^2+3x+2)(x^2+3x-3)-6\\&=(X+2)(X-3)-6=X^2-X-12\\&=(X-4)(X+3)=(x^2+3x-4)(x^2+3x+3)\\&=(x-1)(x+4)(x^2+3x+3)\end{aligned}$$

이므로 $a=-1$, $b=4$, $c=3$, $d=3$ 또는 $a=4$, $b=-1$, $c=3$, $d=3$이고 구하는 값은 $a+b+c+d=9$이다.

답 9

082
다항식 $(x^2+2x+4)(x^2+6x+4)+3x^2$을 인수분해하시오.

$x^2+4=X$로 치환하여 인수분해하면

$$\begin{aligned}(x^2+2x+4)(x^2+6x+4)+3x^2&=(X+2x)(X+6x)+3x^2\\&=X^2+8Xx+15x^2=(X+3x)(X+5x)\\&=(x^2+3x+4)(x^2+5x+4)\\&=(x+1)(x+4)(x^2+3x+4)\end{aligned}$$

답 $(x+1)(x+4)(x^2+3x+4)$

083

다항식 x^4-3x^3+3x+1을 인수분해하시오.

주어진 식을 x^2으로 묶고 $x-\frac{1}{x}$에 대한 식으로 정리하면

$$x^4-3x^3+3x+1=x^2\left(x^2-3x+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$$
$$=x^2\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x-\frac{1}{x}\right)+2\right\}$$

이다. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x-\frac{1}{x}\right)+2$에서 $x-\frac{1}{x}=t$로 치환하면

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x-\frac{1}{x}\right)+2=t^2-3t+2=(t-1)(t-2)$$
$$=\left(x-\frac{1}{x}-1\right)\left(x-\frac{1}{x}-2\right)$$

이다. 따라서 주어진 식을 인수분해하면

$$x^2\left(x-\frac{1}{x}-1\right)\left(x-\frac{1}{x}-2\right)=(x^2-x-1)(x^2-2x-1)$$

답 $(x^2-x-1)(x^2-2x-1)$

084 중요

다항식 $x(x+1)(x-2)(x-3)+k$가 x에 대한 완전제곱의 꼴로 인수분해될 때, 상수 k의 값을 구하시오.

주어진 식에서 공통부분이 생기도록 항의 순서를 바꾸면

$$x(x+1)(x-2)(x-3)+k=x(x-2)(x+1)(x-3)+k$$
$$=(x^2-2x)(x^2-2x-3)+k$$

이고 $x^2-2x=X$로 치환하고 식을 전개하면

$$(x^2-2x)(x^2-2x-3)+k=X(X-3)+k=X^2-3X+k$$

이다. 위 식이 완전제곱의 꼴이 되도록 정리하면

$$X^2-3X+k=\left(X-\frac{3}{2}\right)^2+k-\frac{9}{4}$$

이므로 완전제곱의 꼴이 되기 위한 상수 k의 값은 $k-\frac{9}{4}=0$에서 $k=\frac{9}{4}$이다.

답 $\frac{9}{4}$

개념

03. 여러 문자를 포함한 식의 인수분해

085 중요

다항식 $x^3+(y-3)x^2+yx+y^2-3y$를 인수분해하면?

① $(x^2+y)(x-y-3)$ ② $(x^2+y)(x+y-3)$
③ $(x^2+y)(x+2y+3)$ ④ $(x^2-y)(x+y-3)$
⑤ $(x^2-y)(x+y+3)$

주어진 다항식을 차수가 낮은 y에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해하면

$$x^3+(y-3)x^2+yx+y^2-3y$$
$$=y^2+(x^2+x-3)y+x^3-3x^2$$
$$=y^2+(x^2+x-3)y+x^2(x-3)$$
$$=(y+x^2)(y+x-3)$$

이고 식을 정리하면 $(x^2+y)(x+y-3)$이다.

답 ②

086

다항식 $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$을 인수분해하시오.

주어진 다항식을 적절히 변형하여 인수분해하면 다음과 같다.

$$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$$
$$=\{(a+b+c)^3-c^3\}-(a^3+b^3)$$
$$=\{(a+b+c)-c\}\{(a+b+c)^2+(a+b+c)c+c^2\}-(a+b)(a^2-ab+b^2)$$
$$=(a+b)\{(a^2+b^2+3c^2+2ab+3bc+3ca)-(a^2-ab+b^2)\}$$
$$=(a+b)(3c^2+3ca+3ab+3bc)$$
$$=3(a+b)\{c(c+a)+b(c+a)\}$$
$$=3(a+b)(b+c)(c+a)$$

답 $3(a+b)(b+c)(c+a)$

087

다항식 $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2$을 인수분해하시오.

다항식 $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2$을 a에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해하면 다음과 같다.

$$a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2$$
$$=a^4-2(b^2+c^2)a^2+b^4-2b^2c^2+c^4$$
$$=a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b^2-c^2)^2$$
$$=a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b+c)^2(b-c)^2$$
$$=\{a^2-(b+c)^2\}\{a^2-(b-c)^2\}$$
$$=(a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)$$

답 $(a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)$

088

다항식 $(c-b)a^3+(a-c)b^3+(b-a)c^3$을 인수분해하시오.

주어진 다항식을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$(c-b)a^3+(a-c)b^3+(b-a)c^3$$
$$=-(b-c)a^3+(b^3-c^3)a-bc(b^2-c^2)$$
$$=(b-c)\{-a^3+(b^2+bc+c^2)a-bc(b+c)\}$$

이다. 차수가 낮은 b에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해하면

$$(b-c)\{-a^3+(b^2+bc+c^2)a-bc(b+c)\}$$
$$=(b-c)(-a^3+ab^2+abc+ac^2-b^2c-bc^2)$$
$$=(b-c)\{(a-c)b^2+(ac-c^2)b-a(a^2-c^2)\}$$
$$=(b-c)(a-c)(b^2+bc-a^2-ac)$$
$$=(b-c)(a-c)\{(b+a)(b-a)+c(b-a)\}$$
$$=(b-c)(a-c)(b-a)(a+b+c)$$

이므로 즉, $(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$이다.

답 $(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

개념

04. 인수정리를 이용한 인수분해

089

이차식 $Q(x)$가 다항식 x^3-4x^2+6x-9의 인수일 때, $Q(3)$의 값은?

① 3 ② 6 ③ 9
④ 12 ⑤ 15

$P(x)=x^3-4x^2+6x-9$라 하면 $P(3)=27-36+18-9=0$이므로 $P(x)$는 $x-3$을 인수로 가진다. 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

3	1	−4	6	−9
		3	−3	9
	1	−1	3	0

에서 $P(x)=(x-3)(x^2-x+3)$이므로 $Q(x)=x^2-x+3$이고 구하는 값은 $Q(3)=9-3+3=9$이다.

답 ③

090 중요

x에 대한 이차식 x^2+ax+b가 x에 대한 다항식

$$x^3+(2-k)x^2+(4-2k)x-4k$$

의 인수일 때, 두 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

(단, k는 실수이다.)

$P(x)=x^3+(2-k)x^2+(4-2k)x-4k$라 할 때,

$$P(k)=k^3+(2-k)k^2+(4-2k)k-4k=0$$

이므로 $P(x)$는 $x-k$를 인수로 가진다. 조립제법을 이용하면

k	1	$2-k$	$4-2k$	$-4k$
		k	$2k$	$4k$
	1	2	4	0

에서 $P(x)=(x-k)(x^2+2x+4)$이다. x^2+2x+4는 실수범위에서 더 이상 인수분해되지 않는다. 즉, $x^2+ax+b=x^2+2x+4$에서 $a=2$, $b=4$이므로 구하는 값은 $a+b=6$이다.

답 6

091

다항식 $2x^4-x^3-4x^2+4x-1$을 인수분해하시오.

$P(x)=2x^4-x^3-4x^2+4x-1$이라 할 때, $P(1)=2-1-4+4-1=0$이므로 $P(x)$는 $x-1$을 인수로 가진다. 조립제법을 이용하면

1	2	−1	−4	4	−1
		2	1	−3	1
	2	1	−3	1	0

이므로 $P(x)=(x-1)(2x^3+x^2-3x+1)$이다. $Q(x)=2x^3+x^2-3x+1$이라 할 때, $Q\left(\frac{1}{2}\right)=0$이므로 $Q(x)$는 $x-\frac{1}{2}$을 인수로 가진다. 조립제법을 이용하면

$\frac{1}{2}$	2	1	−3	1
		1	1	−1
	2	2	−2	0

이므로 $Q(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2+2x-2)$이다. 따라서

$$2x^4-x^3-4x^2+4x-1=(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2+2x-2)$$
$$=(x-1)(2x-1)(x^2+x-1)$$

답 $(x-1)(2x-1)(x^2+x-1)$

092 중요

x에 대한 다항식 x^4+ax^2+b가 $(x+1)^2$을 인수로 가질 때, 상수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값을 구하시오.

$P(x)=x^4+ax^2+b$라 할 때, $P(x)$는 $(x+1)^2$을 인수로 가지므로 인수정리에 의하여 $P(-1)=0$이다. 따라서

$$P(-1)=1+a+b=0 \quad \Rightarrow \quad b=-a-1$$

이다. $P(x)$를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면

−1	1	0	a	0	$-a-1$
		−1	1	$-a-1$	$a+1$
−1	1	−1	$a+1$	$-a-1$	0
		−1	2	$-a-3$	
	1	−2	$a+3$	$-2a-4$	

에서 $-2a-4=0$이므로 $a=-2$이다. 따라서 $b=1$이고 구하는 값은 $a^2+b^2=5$

답 5

093

x에 대한 다항식 x^3-ax^2+bx-6이 $(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)$로 인수분해된다. $\alpha+\beta=5$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.

(단, a, b는 상수이고, $\alpha\neq1$, $\beta\neq1$이다.)

주어진 다항식을 $P(x)=x^3-ax^2+bx-6$으로 놓으면 $P(1)=0$이므로

$$P(1)=1-a+b-6=0 \quad \Rightarrow \quad b=a+5 \qquad \cdots ㉠$$

이다. 조립제법을 이용하면

1	1	$-a$	$a+5$	−6
		1	$-a+1$	6
	1	$-a+1$	6	0

에서 $P(x)=(x-1)(x^2-ax+x+6)$이 $(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)$로 인수분해되므로

$$(x-1)(x^2-ax+x+6)=(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)$$

이다. 따라서 양변을 $x-1$로 나누면

$$x^2-ax+x+6=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$$

이다. 계수를 비교하면 $\alpha\beta=6$이고 $\alpha+\beta=a-1=5$이다. 따라서 $a=6$이고, ㉠에 의하여 $b=11$이므로 구하는 값은 $a^2+b^2=6^2+11^2=157$이다.

답 157

개념

05. 인수분해의 응용 - 식의 값 또는 수의 계산

094

$x=2-\sqrt{3}$, $y=2+\sqrt{3}$일 때, $x^4+x^2y^2+y^4$의 값은?

① 190 ② 195 ③ 200
④ 205 ⑤ 210

주어진 식을 인수분해하면

$$x^4+x^2y^2+y^4=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$$

이다. 이때 $x+y=4$, $xy=1$이므로 곱셈 공식의 변형을 이용하여 위 식에 대입하면

$$(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)=\{(x+y)^2-xy\}\{(x+y)^2-3xy\}$$
$$=(4^2-1)(4^2-3)=15\cdot13=195$$

이므로 구하는 값은 195이다.

답 ②

095 중요

자연수 N을

$$N=5\cdot55^3+15\cdot55^2+15\cdot55+5$$

라 할 때, 자연수 N의 양의 약수의 개수를 구하시오.

$55=a$라 치환하여 인수분해하면

$$N=5a^3+15a^2+15a+5$$
$$=5(a^3+3a^2+3a+1)=5(a+1)^3$$

이다. $a=55$를 대입하여 소인수분해하면

$$5(a+1)^3=5\cdot56^3=5\cdot(2^3\cdot7)^3=2^9\cdot5\cdot7^3$$

이므로 자연수 N의 양의 약수의 개수는 $(9+1)(1+1)(3+1)=80$이다.

답 80

096

$1001^2+1002^2+1003^2-999^2-998^2-997^2$의 값을 구하시오.

주어진 식의 순서를 적절히 변형하면

$$1001^2+1002^2+1003^2-999^2-998^2-997^2$$
$$=1001^2-999^2+1002^2-998^2+1003^2-997^2$$
$$=(1001+999)(1001-999)+(1002+998)(1002-998)$$
$$+(1003+997)(1003-997)$$
$$=2000\cdot2+2000\cdot4+2000\cdot6=2000\cdot12=24000$$

답 24000

097

세 실수 a, b, c에 대하여 $a=5-3\sqrt{2}$, $b=5+3\sqrt{2}$, $c=-10$일 때, $a^3+b^3+c^3$의 값을 구하시오.

다항식 $a^3+b^3+c^3-3abc$를 인수분해하면

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

이다. 이때

$$a+b+c=(5-3\sqrt{2})+(5+3\sqrt{2})+(-10)=0$$

이므로 $a^3+b^3+c^3=3abc$이다. 따라서 구하는 값은 다음과 같다.

$$a^3+b^3+c^3=3abc$$
$$=3(5-3\sqrt{2})(5+3\sqrt{2})(-10)$$
$$=3\cdot7\cdot(-10)=-210$$

답 -210

개념

06. 인수분해의 응용 - 삼각형

098 중요

삼각형의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여

$$a^3-a^2c-ab^2+ac^2+b^2c-c^3=0$$

이 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인지 구하시오.

주어진 등식의 좌변을 차수가 가장 낮은 b에 대하여 정리하면

$$-(a-c)b^2+a^3-c^3-a^2c+ac^2$$

이다. 공통부분으로 묶어서 인수분해하면

$$-(a-c)b^2+a^3-c^3-a^2c+ac^2$$
$$=-(a-c)b^2+(a-c)(a^2+ac+c^2)-ac(a-c)$$
$$=-(a-c)b^2+(a-c)(a^2+c^2)$$
$$=(a-c)(a^2+c^2-b^2)$$

이다. 주어진 등식이 성립하면 $a=c$ 또는 $b^2=a^2+c^2$이므로 구하는 삼각형은 $a=c$인 이등변삼각형 또는 빗변의 길이가 b인 직각삼각형이다.

답 $a=c$인 이등변삼각형 또는 빗변의 길이가 b인 직각삼각형

099

삼각형의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여 등식 $a^3+b^3=3abc-c^3$이 성립하고, 둘레의 길이가 12인 삼각형의 넓이는?

① $3\sqrt{3}$ ② $4\sqrt{2}$ ③ $4\sqrt{3}$
④ $5\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{3}$

주어진 식을 좌변으로 이항하여 인수분해하면

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$
$$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$$

에서 $a+b+c>0$이므로 $a=b$, $b=c$, $c=a$일 때, 즉 $a=b=c$일 때, 등식이 성립한다. 따라서 주어진 삼각형은 둘레의 길이가 12인 정삼각형이므로 한 변의 길이는 4이고 구하는 삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot4^2=4\sqrt{3}$이다.

답 ③

100 상위 1%

세 변의 길이가 $x-a$, $x-b$, $x-c$인 직각삼각형에 대하여 다항식

$$x^3-6x^2+11x-6=(x-a)(x-b)(x-c)$$

로 인수분해될 때, 이 직각삼각형의 빗변의 길이를 구하시오.

(단, a, b, c는 자연수이다.)

$P(x)=x^3-6x^2+11x-6$이라 하면 $P(1)=0$이므로 조립제법을 이용하면

1	1	−6	11	−6
		1	−5	6
	1	−5	6	0

에서 $P(x)=(x-1)(x^2-5x+6)=(x-1)(x-2)(x-3)$이다. 직각삼각형의 세 변의 길이가 $x-1$, $x-2$, $x-3$이고

$$(x-1)^2=(x-2)^2+(x-3)^2$$

에서 식을 정리하면 $x^2-8x+12=(x-2)(x-6)=0$이므로 $x=2$ 또는 $x=6$이다. $x-1$, $x-2$, $x-3$은 직각삼각형의 세 변의 길이이므로 $x>3$이고 $x=6$이다. 따라서 빗변의 길이는 $x-1=6-1=5$이다.

답 5

개념 정복

101

0이 아닌 세 실수 a, b, c에 대하여 $a+b+c=0$일 때, $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$의 값을 구하시오.

$a+b+c=0$이므로 $b+c=-a$, $a+c=-b$, $a+b=-c$이고

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

에서 $a^3+b^3+c^3=3abc$이다. 주어진 식을 전개하면

$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{a(b+c)}{bc}+\frac{b(a+c)}{ca}+\frac{c(a+b)}{ab}$$

$$=\frac{-a^2}{bc}+\frac{-b^2}{ca}+\frac{-c^2}{ab}=\frac{-(a^3+b^3+c^3)}{abc}=\frac{-3abc}{abc}=-3$$

답 -3

102

14^6-1이 소수인 두 자리의 자연수 n으로 나누어떨어질 때, 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

$14=x$로 치환하여 주어진 식을 x에 대하여 인수분해하면

$$x^6-1=(x^3+1)(x^3-1)$$

$$=(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)$$

이다. $x=14$를 대입하면

$$(14+1)\cdot(14^2-14+1)\cdot(14-1)\cdot(14^2+14+1)$$

$$=15\cdot183\cdot13\cdot211=3^2\cdot5\cdot13\cdot61\cdot211$$

이다. 소수인 두 자리의 자연수 n은 13과 61이므로 구하는 모든 자연수 n의 값의 합은 74이다.

답 74

103 마무리

$\angle B=90°$인 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$라 할 때,

$$a+c=4,\quad \frac{a^2b+ab^2+b^2c+abc}{a^3+a^2b+ac^2+bc^2}=\frac{8}{7}$$

이 성립한다. 삼각형의 세 변의 길이의 합을 구하시오.

구하는 식의 분모에서 차수가 가장 낮은 b에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$a^3+a^2b+ac^2+bc^2=(a^2+c^2)b+(a^3+ac^2)$$

이므로 공통부분으로 묶어 인수분해하면

$$(a^2+c^2)b+(a^3+ac^2)=(a^2+c^2)b+a(a^2+c^2)$$

$$=(a+b)(a^2+c^2)$$

이다. 또한, 분자에서 차수가 가장 낮은 c에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$a^2b+ab^2+b^2c+abc=(ab+b^2)c+a^2b+ab^2$$

이므로 공통부분으로 묶어 인수분해하면

$$(ab+b^2)c+a^2b+ab^2=bc(a+b)+ab(a+b)$$

$$=b(a+b)(a+c)$$

이다. 이때, 삼각형 ABC가 b가 빗변인 직각삼각형이므로 피타고라스의 정리에 의하여 $a^2+c^2=b^2$이다. 따라서

$$\frac{a^2b+ab^2+b^2c+abc}{a^3+a^2b+ac^2+bc^2}=\frac{b(a+b)(a+c)}{(a+b)(a^2+c^2)}=\frac{b(a+c)}{a^2+c^2}$$

$$=\frac{b(a+c)}{b^2}=\frac{a+c}{b}=\frac{8}{7}$$

에서 $a+c=4$이므로 $b=\frac{7}{2}$이고 구하는 세 변의 길이의 합은 $a+b+c=\frac{15}{2}$이다.

답 $\frac{15}{2}$

104

10이하의 자연수 n에 대하여 사차식 x^4-2nx^2+1이 계수가 정수인 두 개 이상의 다항식의 곱으로 인수분해될 때, n의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

주어진 사차식이 계수가 정수인 다항식의 곱으로 인수분해되므로 상수항이 $1\cdot1$인 경우와 $-1\cdot(-1)$인 경우로 나누어 볼 수 있다.

(i) $x^4-2nx^2+1=(x^2+px+1)(x^2+qx+1)$ (단, p, q는 정수)일 때,

$$x^4-2nx^2+1=x^4+(p+q)x^3+(pq+2)x^2+(p+q)x+1$$

에서 $p+q=0$, $pq+2=-2n$이므로 $q=-p$를 $pq+2=-2n$에 대입하면

$$2n=p^2-2 \quad \cdots ㉠$$

이다. $1\le n\le10$인 자연수이므로 $2\le p^2-2\le20$에서 $4\le p^2\le22$이다. 따라서 $p^2=4$, 9, 16이고 이를 ㉠에 각각 대입하면 $n=1$, $\frac{7}{2}$, 7이므로 자연수 n은 1, 7이다.

(ii) $x^4-2nx^2+1=(x^2+px-1)(x^2+qx-1)$ (단, p, q는 정수)일 때,

$$x^4-2nx^2+1=x^4+(p+q)x^3+(pq-2)x^2-(p+q)x+1$$

에서 $p+q=0$, $pq-2=-2n$이므로 $q=-p$를 $pq-2=-2n$에 대입하면

$$2n=p^2+2 \quad \cdots ㉡$$

이다. $1\le n\le10$인 자연수이므로 $2\le p^2+2\le20$에서 $0\le p^2\le18$이다. 따라서 $p^2=0$, 1, 4, 9, 16이고 이를 ㉡에 각각 대입하면 $n=1$, $\frac{3}{2}$, 3, $\frac{11}{2}$, 9이므로 자연수 n은 1, 3, 9이다.

(i), (ii)에서 자연수 $n=1$, 3, 7, 9이므로 n의 개수는 4이다.

답 ④

105

x, y에 대한 다항식 $(k+1)x^2+(k-1)y^2-2k$가 계수가 실수인 두 일차식의 곱으로 인수분해될 때, 실수 k의 값을 모두 구하시오.

주어진 다항식의 계수가 0인 경우와 아닌 경우를 나누어보면

(i) $k+1=0$ 즉, $k=-1$일 때, 주어진 다항식은 $-2y^2+2=-2(y+1)(y-1)$로 인수분해된다.

(ii) $k-1=0$ 즉, $k=1$일 때, 주어진 다항식은 $2x^2-2=2(x+1)(x-1)$로 인수분해된다.

(iii) $k=0$일 때, 주어진 다항식은 $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$로 인수분해된다.

(iv) $k(k-1)(k+1)\neq0$일 때 주어진 다항식이

$$(k+1)x^2+(k-1)y^2-2k=(ax+by+c)(dx+ey+f)$$

의 꼴로 인수분해된다고 하면 (단, a, b, c, d, e, f는 실수)

$$(ax+by)(dx+ey)=(k+1)x^2+(k-1)y^2 \quad \cdots ㉠$$

$$(ax+c)(dx+f)=(k+1)x^2-2k \quad \cdots ㉡$$

$$(by+c)(ey+f)=(k-1)y^2-2k \quad \cdots ㉢$$

으로 나타낼 수 있다. ㉡과 ㉢의 우변이 인수분해되기 위해서는 $(k+1)k>0$이고 $(k-1)k>0$이므로 $k+1$과 $k-1$은 같은 부호이다. 따라서 $(k+1)(k-1)>0$이고 ㉠의 우변을 인수분해할 수 없다.

(i), (ii), (iii), (iv)에 의하여 구하는 실수 k의 값은 -1, 0, 1이다.

답 -1, 0, 1

서 술 형

• 풀이 과정에 점수가 부여되니 풀이 과정 및 정답을 상세하게 서술하세요.

106

자연수 N을 다음과 같이

$$N=\frac{10^6+1}{10^2+1}$$

로 나타낼 때, 자연수 N을 구하시오.

$10^2=A$로 치환하면 [20%]

$$N=\frac{A^3+1}{A+1}=\frac{(A+1)(A^2-A+1)}{A+1}$$
$$=A^2-A+1$$

이다. [40%]

이 식에 $A=10^2$을 대입하면

$$N=A^2-A+1=(10^2)^2-10^2+1=10000-100+1=9901$$

이다. 따라서 N은 9901이다. [40%]

답 9901

107

두 자연수 m, n에 대하여 등식

$$1\times2\times3\times\cdots\times(m-1)\times m$$
$$=150n(15^2-1)(15^2-2^2)(15^2-3^2)\cdots(15^2-14^2)$$

이 성립할 때, 두 자리 자연수 m, n에 대하여 $m+n$의 값을 구하시오.

주어진 등식의 우변을 인수분해하여 정리하면

$$150n(15^2-1)(15^2-2^2)(15^2-3^2)\cdots(15^2-14^2)$$
$$=150n(16\cdot14)(17\cdot13)(18\cdot12)\cdots(29\cdot1)$$
$$=\frac{1}{3}\cdot15\cdot30n(16\cdot14)(17\cdot13)(18\cdot12)\cdots(29\cdot1)$$
$$=1\times2\times3\times\cdots\times30\times\frac{1}{3}n$$

이므로 [40%]

$$1\times2\times3\times\cdots\times m=1\times2\times3\times\cdots\times30\cdot\frac{1}{3}n$$

이다. [10%]

(i) $\frac{1}{3}n=1$일 때, $n=3$이므로 n은 두 자리 자연수가 아니다.

(ii) $\frac{1}{3}n=31$일 때, $n=93$이고 $m=31$이다.

(iii) $\frac{1}{3}n=31\cdot32$일 때, $n=2976$이므로 두 자리 자연수가 아니다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 $m=31$, $n=93$이므로 구하는 값은 $m+n=124$이다. [50%]

답 124

108 단계형

자연수 n에 대한 다항식 n^4-11n^2+49에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) $n^4-11n^2+49=(n^2+a)^2-bn^2$일 때, 자연수 a, b를 각각 구하시오.

(2) 다항식 n^4-11n^2+49를 인수분해하시오.

(3) n^4-11n^2+49가 소수일 때, n^4-11n^2+49의 값을 구하시오.

(1) $a^2=49$이므로 자연수 $a=7$이다. 또한, 이차항을 $-11n^2=14n^2-25n^2$으로 분리하면 주어진 다항식은

$$n^4+14n^2+49-25n^2=(n^2+7)^2-25n^2$$

이므로 구하는 자연수는 각각 $a=7$, $b=25$이다.

(2) (1)의 결과를 이용하여 인수분해하면 다음과 같다.

$$n^4-11n^2+49=(n^2+7)^2-25n^2$$
$$=\{(n^2+7)-5n\}\{(n^2+7)+5n\}$$
$$=(n^2-5n+7)(n^2+5n+7)$$

(3) n^4-11n^2+49가 소수이므로

$$(n^2-5n+7)(n^2+5n+7)$$

은 (소수)×1 또는 1×(소수)이다. 이때 $n^2-5n+7<n^2+5n+7$이므로 $n^2-5n+7=1$이고 n^2+5n+7은 소수이다. $n^2-5n+6=0$에서

$$n^2-5n+6=(n-2)(n-3)=0$$

이므로 $n=2$ 또는 $n=3$이다.

(i) $n=2$인 경우, $n^2+5n+7=21$이므로 n^4-11n^2+49는 소수가 아니다.

(ii) $n=3$인 경우, $n^2+5n+7=31$이므로 n^4-11n^2+49는 소수이다.

따라서 구하는 값은 $n^4-11n^2+49=31$이다.

답 (1) $a=7$, $b=25$ (2) $(n^2-5n+7)(n^2+5n+7)$ (3) 31

04 복소수

01 복소수의 뜻과 연산

1. 복소수: 두 실수 a, b와 허수단위 i에 대하여

(1) 복소수: $a+bi$의 꼴로 나타내어지는 수

$$\underset{\text{실수부분}}{a} + \underset{\text{허수부분}}{bi}$$

(2) 켤레복소수: 복소수 $a+bi$에 대하여 허수부분의 부호를 바꾼 복소수 $\overline{a+bi}=a-bi$

2. 복소수가 서로 같을 조건: 실수 a, b, c, d에 대하여

(1) $a+bi=c+di \iff a=c,\ b=d$

(2) $a+bi=0 \iff a=0,\ b=0$

3. 복소수의 연산: 실수 a, b, c, d와 허수단위 i에 대하여

(1) 복소수의 덧셈: $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

(2) 복소수의 뺄셈: $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

(3) 복소수의 곱셈: $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

(4) 복소수의 나눗셈: $(a+bi)\div(c+di)=\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$

4. 음수의 제곱근: $a>0$일 때, $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$이고, $-a$의 제곱근은 $\pm\sqrt{a}i$이다.

02 복소수의 성질

1. 복소수의 연산에 대한 성질: 임의의 세 복소수 z_1, z_2, z_3에 대하여

(1) 교환법칙: $z_1+z_2=z_2+z_1$, $\quad z_1z_2=z_2z_1$

(2) 결합법칙: $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$, $\quad (z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$

(3) 분배법칙: $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$, $\quad (z_1+z_2)z_3=z_1z_3+z_2z_3$

2. 제곱근의 곱셈과 나눗셈: 실수 a, b에 대하여

(1) $a<0$, $b<0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이다.

(2) $a>0$, $b<0$일 때, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$이다.

3. 켤레복소수의 성질

a, b가 실수, 복소수 $z=a+bi$이고, 그 켤레복소수는 $\overline{z}$라 하면 다음 식이 성립한다.

(단, z_1, z_2와 그 각각의 켤레복소수는 $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$이다.)

(1) $z+\overline{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$

(2) $z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$

(3) $\overline{\overline{z}}=z$

(4) $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$

(5) $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

(6) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ (단, $z_2\neq0$)

4. 허수단위 i의 거듭제곱

n이 음이 아닌 정수일 때, 허수단위 i의 거듭제곱은 다음과 같이 반복된다.

$$i^{4n+1}=i,\quad i^{4n+2}=-1,\quad i^{4n+3}=-i,\quad i^{4n+4}=1$$

마·타·노·트

▶ **허수단위**

허수단위 i는 제곱하여 -1이 되는 수이므로 $i=\sqrt{-1}$로 나타내기도 한다.

▶ **켤레복소수**

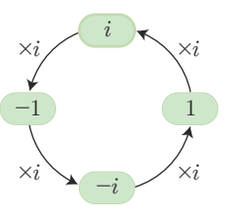
복소수 z의 켤레복소수는 $\overline{z}$로 나타낸다.

▶ **복소수가 실수, 허수, 순허수가 되기 위한 조건**

복소수 $a+bi$에서

1. **실수** $b=0$인 복소수
2. **허수** $b\neq0$인 복소수
3. **순허수** $a=0$, $b\neq0$인 복소수

▶ **허수단위 i의 거듭제곱**



109 2011학년도 06월 교육청

개념 03

복소수 $\alpha=(2-n-5i)^2$에 대하여 α^2이 음의 실수가 되도록 하는 자연수 n의 값을 구하시오.

α를 실수부분과 허수부분으로 나누어 전개하면

$$\begin{aligned}\alpha&=(2-n-5i)^2\\&=2^2+(-n)^2+(-5i)^2+2(-2n+5ni-10i)\\&=4+n^2+25i^2-4n+10ni-20i\\&=(n^2-4n-21)+10(n-2)i\end{aligned}$$

이다. 이때 복소수 α^2이 음의 실수가 되려면 α는 순허수가 되어야 한다. 따라서

$$n^2-4n-21=(n+3)(n-7)=0,\quad n\neq 2$$

이고 구하는 자연수 n의 값은 7이다.

답 7

110 2016학년도 06월 교육청

개념 01, 03, 04

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 0이 아닌 실수)에 대하여 z^2-z가 실수일 때, **[보기]**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

[보기]

ㄱ. $\overline{z^2-z}$는 실수이다.

ㄴ. $z+\overline{z}=1$

ㄷ. $z\overline{z}>\frac{1}{4}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. (참) z^2-z는 실수이므로 $\overline{z^2-z}$도 실수이다.

ㄴ. (참) $z=a+bi$ ($b\neq 0$)에 대하여 복소수의 연산을 이용하면

$$z^2-z=a^2+2abi-b^2-a-bi=(a^2-a-b^2)+(2a-1)bi$$

이고 z^2-z가 실수이고 $b\neq 0$이므로 $a=\frac{1}{2}$이다. 따라서 $z=\frac{1}{2}+bi$이고 $\overline{z}=\frac{1}{2}-bi$이므로 $z+\overline{z}=1$이다.

ㄷ. (참) $z=\frac{1}{2}+bi$이고 $\overline{z}=\frac{1}{2}-bi$이므로 $z\overline{z}=\frac{1}{4}+b^2$이고 $b\neq 0$이므로 $z\overline{z}>\frac{1}{4}$이다.

답 ⑤

111 2011학년도 11월 교육청

개념 06

등식 $(a+b+3)x+ab-1=0$이 x의 값에 관계없이 항상 성립할 때, $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$의 값은? (단, a, b는 실수이다.)

① -5 ② -2 ③ 1

④ 4 ⑤ 7

등식 $(a+b+3)x+ab-1=0$이 x의 값에 관계없이 항상 성립하므로 항등식의 성질에 의하여

$$a+b=-3,\quad ab=1$$

이다. 이때, $a+b<0$, $ab>0$이므로 $a<0$, $b<0$이고 음수의 제곱근의 성질에 의하여 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이다. 따라서 구하는 값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2&=(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+2\sqrt{a}\sqrt{b}\\&=a+b-2\sqrt{ab}=-3-2\sqrt{1}=-5\end{aligned}$$

답 ①

112 2013학년도 11월 교육청

개념 08

두 복소수 $z_1=\frac{\sqrt{2}}{1+i}$, $z_2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$에 대하여 ${z_1}^n={z_2}^n$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구하시오.

복소수의 거듭제곱을 이용하여 z_1, ${z_1}^2$, ${z_1}^3$, ${z_1}^4$, …을 차례로 구하면

$$z_1=\frac{\sqrt{2}}{1+i}=\frac{1-i}{\sqrt{2}},\ {z_1}^2=-i,\ {z_1}^3=\frac{-i-1}{\sqrt{2}},\ {z_1}^4=-1,\ \dots,\ {z_1}^8=1,\ \dots$$

이고 z_2, ${z_2}^2$, ${z_2}^3$, ${z_2}^4$…을 차례로 구하면

$$z_2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2},\ {z_2}^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2},\ {z_2}^3=1,\dots$$

이다. ${z_1}^n={z_2}^n$이 되려면 ${z_1}^n={z_2}^n=1$일 때이므로, 이를 만족시키는 자연수 n은 8과 3의 공배수이다. 따라서 자연수 n의 최솟값은 24이다.

답 24

개념치료

개념

01. 복소수의 정의와 사칙연산

113 중요

임의의 두 복소수 a, b에 대하여 연산 ♠을

$$a\spadesuit b=2a+b-\frac{2a}{b}$$

로 정의할 때, $(4+2i)\spadesuit(1-i)$의 값을 구하시오.

$a=4+2i$, $b=1-i$로 놓으면

$$a\spadesuit b=2a+b-\frac{2a}{b}=(8+4i)+(1-i)-\frac{8+4i}{1-i}$$

$$=9+3i-\frac{(8+4i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=9+3i-\frac{4+12i}{2}=7-3i$$

답 $7-3i$

114

복소수 $z=a+bi$가 $a^2+b^2=1$을 만족시킬 때, $\frac{1}{1-z}$의 실수부분을 구하시오. (단, $z\neq1$이고 a, b는 실수이다.)

주어진 복소수를 실수부분과 허수부분으로 나누어 나타내면

$$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-a-bi}=\frac{1-a+bi}{(1-a-bi)(1-a+bi)}$$

$$=\frac{1-a}{(1-a)^2+b^2}+\frac{b}{(1-a)^2+b^2}i$$

이다. $z\neq1$, $a^2+b^2=1$에서 $a\neq1$이므로 $\frac{1}{1-z}$의 실수부분은 다음과 같다.

$$\frac{1-a}{(1-a)^2+b^2}=\frac{1-a}{1-2a+a^2+b^2}=\frac{1-a}{2-2a}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

115

두 복소수 α, β에 대하여 $\beta=2+i$이고, $\alpha=\frac{2\beta+2}{1-\beta}$일 때, $\alpha(\alpha+\overline{\alpha})$의 값을 구하시오. (단, $\overline{\alpha}$는 복소수 α의 켤레복소수이다.)

복소수의 사칙연산을 이용하면

$$\alpha=\frac{2\beta+2}{1-\beta}=\frac{6+2i}{-1-i}=\frac{(6+2i)(1-i)}{-(1+i)(1-i)}=\frac{8-4i}{-2}=-4+2i$$

이므로 구하는 식의 값은

$$\alpha(\alpha+\overline{\alpha})=(-4+2i)\cdot(-8)=32-16i$$

답 $32-16i$

개념

02. 복소수가 서로 같을 조건

116 중요

두 실수 x, y가 $\frac{x}{2+i}+\frac{y}{1+2i}=\frac{4}{2-i}$를 만족시킬 때, $x-y$의 값을 구하시오.

주어진 식을 정리하면

$$\frac{x(2-i)}{(2+i)(2-i)}+\frac{y(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{4(2+i)}{(2-i)(2+i)}$$

$$\Rightarrow\ \frac{2x-xi}{5}+\frac{y-2yi}{5}=\frac{8+4i}{5}$$

에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$2x+y=8,\quad -x-2y=4$$

이다. 두 식을 연립하여 풀면 $x=\frac{20}{3}$, $y=-\frac{16}{3}$에서 $x-y=\frac{20}{3}+\frac{16}{3}=12$이다.

답 12

117

두 실수 x, y가 $x^2-2x+xy+2yi+7+y+3i=-3i$를 만족시킬 때, xy의 최솟값은?

① -12 ② -9 ③ -6
④ -3 ⑤ -1

주어진 식의 좌변을 실수부분과 허수부분으로 나누어 나타내면

$$\{x^2+(y-2)x+y+7\}+(2y+3)i=-3i$$

이다. 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$x^2+(y-2)x+y+7=0,\quad 2y+3=-3$$

이므로 $y=-3$이고, 이를 대입하면 $x^2-5x+4=(x-1)(x-4)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=4$이다. 따라서 xy의 최솟값은 -12이다.

답 ①

118

다음 중 두 복소수 $z_1=2+2i$, $z_2=-1+3i$와 정수 a, b에 대하여 az_1+bz_2로 나타낼 수 없는 복소수는?

① $3+7i$ ② $-1+4i$ ③ $2-6i$
④ $-3+i$ ⑤ $7+3i$

$az_1+bz_2=(2a-b)+(2a+3b)i$에서

① $2a-b=3$, $2a+3b=7$이므로 두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=1$이다.

② $2a-b=-1$, $2a+3b=4$이므로 두 식을 연립하여 풀면 $b=\frac{5}{4}$이므로 정수가 아니다.

③ $2a-b=2$, $2a+3b=-6$이므로 두 식을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=-2$이다.

④ $2a-b=-3$, $2a+3b=1$이므로 두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=1$이다.

⑤ $2a-b=7$, $2a+3b=3$이므로 두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-1$이다.

따라서 정수 a, b에 대하여 az_1+bz_2로 나타낼 수 없는 복소수는 ② $-1+4i$이다.

답 ②

개념

03. 복소수가 실수 또는 순허수인 조건

119 중요

다음 조건을 만족시키는 복소수 z에 대하여 z^2의 값을 구하시오.

(가) $(z-4i)^2$이 양의 실수이다.
(나) z의 실수부분과 허수부분의 합은 0이다.

$z=a+bi$ (단, a, b는 실수)로 놓으면 $(z-4i)^2$이 양의 실수이므로 $z-4i=a+(b-4)i$는 0이 아닌 실수이다. 즉 $b=4$이다. 또한, z의 실수부분과 허수부분의 합 $a+b=a+4=0$이므로 $a=-4$이다. 따라서 $z=-4+4i$이고 $z^2=-32i$이다.

답 $-32i$

120

복소수 $ix^6+(3+i)x^2-(3-2i)x-6$을 제곱했을 때, 음의 실수가 되도록 하는 실수 x의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

주어진 식을 실수부분과 허수부분으로 나누어 정리하면

$$ix^6+(3+i)x^2-(3-2i)x-6=(3x^2-3x-6)+(x^6+x^2+2x)i$$

이다. 복소수를 제곱한 값이 음의 실수이면 그 복소수는 순허수이다. 즉, 주어진 복소수는 실수부분이 0이고 허수부분이 0이 아니다.

$$3x^2-3x-6=3(x+1)(x-2)=0$$

이므로 $x=-1$ 또는 $x=2$이다.
(i) $x=-1$일 때, $x^6+x^2+2x=1+1-2=0$이므로 주어진 복소수는 0이다.
(ii) $x=2$일 때, $x^6+x^2+2x=64+4+4=72\neq0$이므로 주어진 복소수는 $72i$이다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 복소수의 제곱이 음의 실수일 때, 실수 x의 값은 2이다.

답 ④

개념

04. 켤레복소수의 성질

121 중요

네 실수 a, b, c, d에 대하여

$$\overline{(a+bi)^2}=2-i,\quad (a-bi)^4=\frac{c+di}{1+2i}$$

일 때, cd의 값을 구하시오. (단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

$z=a+bi$라 하면 켤레복소수의 성질에 의하여

$$\overline{(a+bi)^2}=\overline{z^2}=\overline{z}^2=2-i$$

이고

$$(a-bi)^4=\overline{z}^4=(\overline{z}^2)^2=(2-i)^2=3-4i$$

이다. 따라서 복소수의 사칙연산에 의하여

$$3-4i=\frac{c+di}{1+2i}\quad\Rightarrow\quad c+di=(1+2i)(3-4i)=11+2i$$

이다. 복소수가 서로 같을 조건으로부터 $c=11$, $d=2$이므로 구하는 값은 $cd=22$이다.

답 22

122 상위 1%

복소수 z에 대하여 $(z-\overline{z})i<0$이고 $\frac{z}{1+z^2}$와 $\frac{z^2}{1-z}$이 모두 실수일 때, z의 값을 구하시오. (단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

$z=a+bi$ (단, a, b는 실수)라 하면 $(z-\overline{z})i=-2b<0$에서 $b>0$이다. 복소수 z가 실수가 아니므로 $z\neq\overline{z}$이다. $\frac{z}{1+z^2}$가 실수이므로

$$\frac{z}{1+z^2}=\overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)}=\frac{\overline{z}}{1+\overline{z}^2}\quad\Rightarrow\quad z(1+\overline{z}^2)=\overline{z}(1+z^2)$$

이다. 식을 정리하면 $(z-\overline{z})(1-z\overline{z})=0$에서 $z\neq\overline{z}$이므로 $z\overline{z}=1$이다. 따라서 $a^2+b^2=1$이다. 한편, $\frac{z^2}{1-z}$이 실수이므로

$$\frac{z^2}{1-z}=\overline{\left(\frac{z^2}{1-z}\right)}=\frac{\overline{z}^2}{1-\overline{z}}\quad\Rightarrow\quad z^2-z^2\overline{z}=\overline{z}^2-z\overline{z}^2$$

인데, 식을 정리하면 $(z-\overline{z})(z+\overline{z}-z\overline{z})=0$에서 $z\neq\overline{z}$이므로 $z+\overline{z}-z\overline{z}=0$이다. 즉, $2a-a^2-b^2=2a-1=0$에서 $a=\frac{1}{2}$이다. $a^2+b^2=1$, $b>0$이므로 $b=\sqrt{1-a^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$이다. 따라서 $z=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$이다.

답 $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$

123

복소수 α, β와 각각의 켤레복소수 $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$에 대하여 $\alpha\overline{\beta}=2$이고 $\alpha^2=1+i$일 때, $\frac{\beta}{\overline{\alpha}}+\frac{\overline{\alpha}}{\beta}$의 값을 구하시오.

켤레복소수의 성질에 의하여 $\overline{\alpha^2}=\overline{\alpha}^2$이므로 $\overline{\alpha}^2=1-i$이다. $\overline{\alpha}\beta=\overline{\alpha\overline{\beta}}=\overline{2}=2$에서 $(\overline{\alpha}\beta)^2=4$이므로

$$\beta^2=\frac{4}{\overline{\alpha}^2}=\frac{4}{1-i}=2(1+i)$$

이다. 따라서 구하는 식의 값은 다음과 같다.

$$\frac{\beta}{\overline{\alpha}}+\frac{\overline{\alpha}}{\beta}=\frac{\overline{\alpha}^2+\beta^2}{\overline{\alpha}\beta}=\frac{(1-i)+2(1+i)}{2}=\frac{3+i}{2}$$

답 $\frac{3+i}{2}$

124

복소수 $z=a+bi$에 대하여 $z^*=b+ai$라 하자. $z=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$일 때, $4z^5(z^*)^4$의 값을 구하시오. (단, a, b는 실수이다.)

$z=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$이면 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $z^*=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$이다. 이때,

$$zz^*=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\times\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)=\frac{(1+\sqrt{3}i)(\sqrt{3}+i)}{4}=i$$

임을 이용하면 구하는 값은

$$4z^5(z^*)^4=4z(zz^*)^4=4z\cdot i^4=4z=2+2\sqrt{3}i$$

답 $2+2\sqrt{3}i$

개념

05. 복소수가 주어질 때의 식의 값

125 중요

두 복소수 α, β에 대하여 $\alpha=-2+i$, $\beta=\overline{\alpha}$일 때,

$$\alpha^2\beta^2+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+3\alpha\beta+\alpha+\beta+1$$

의 값을 구하시오. (단, $\overline{\alpha}$는 복소수 α의 켤레복소수이다.)

켤레복소수의 연산을 이용하면 $\alpha+\beta=\alpha+\overline{\alpha}=-4$, $\alpha\beta=\alpha\overline{\alpha}=(-2+i)(-2-i)=5$
이므로 주어진 식의 값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&\alpha^2\beta^2+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+3\alpha\beta+\alpha+\beta+1\\&=(\alpha\beta)^2+\alpha\beta(\alpha+\beta)+3\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1\\&=5^2+5\cdot(-4)+3\cdot5+(-4)+1=17\end{aligned}$$

답 17

126

$x=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{-2}}{\sqrt{6}+\sqrt{-2}}$, $y=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{-2}}{\sqrt{6}-\sqrt{-2}}$일 때, $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$의 값을 구하시오.

$x=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{-2}}{\sqrt{6}+\sqrt{-2}}$, $y=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{-2}}{\sqrt{6}-\sqrt{-2}}$이므로

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}&=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{-2}}{\sqrt{6}-\sqrt{-2}}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{-2}}{\sqrt{6}+\sqrt{-2}}\\&=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}i}{\sqrt{6}-\sqrt{2}i}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}i}{\sqrt{6}+\sqrt{2}i}\\&=\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2}i)^2+(\sqrt{6}-\sqrt{2}i)^2}{(\sqrt{6}-\sqrt{2}i)(\sqrt{6}+\sqrt{2}i)}\\&=\frac{4+4\sqrt{3}i+4-4\sqrt{3}i}{6+2}=1\end{aligned}$$

답 1

127 상위 1%

$x=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$일 때, 다항식 $x^5-x^4+x^3-x^2+x+3$의 값을 구하시오.

$x-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$에서 $2x-1=-\sqrt{3}i$이고 양변을 제곱하면

$$4x^2-4x+1=-3 \quad\Rightarrow\quad x^2-x+1=0 \qquad \cdots\ ㉠$$

이다. 다항식 $x^5-x^4+x^3-x^2+x+3$을 x^2-x+1로 나누었을 때의 몫이 x^3-1이고 나머지가 4이므로 다항식의 나눗셈을 이용하면

$$x^5-x^4+x^3-x^2+x+3=(x^3-1)(x^2-x+1)+4 \qquad \cdots\ ㉡$$

이다. 이때 ㉡에 ㉠을 대입하면 구하는 식의 값은 4이다.

답 4

개념

06. 음수의 제곱근

128 중요

0이 아닌 실수 a, b, c가 다음 조건을 만족시킬 때, 세 수 a, b, c의 대소 관계로 옳은 것은?

(가) $\sqrt{a}\sqrt{-b}=-\sqrt{-ab}$
(나) $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}}=-\sqrt{\dfrac{b}{c}}$
(다) $|a+b|+|b+c-3|=0$

① $a<b<c$ ② $b<c<a$ ③ $c<b<a$
④ $a<c<b$ ⑤ $c<a<b$

(가) $\sqrt{a}\sqrt{-b}=-\sqrt{-ab}$이므로 $a<0$, $-b<0$이고 $a<b$이다.
(나) $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}}=-\sqrt{\dfrac{b}{c}}$이므로 $c<0$, $b>0$이고 $c<b$이다.
(다) $|a+b|+|b+c-3|=0$에서 $a+b=0$, $b+c-3=0$이므로 $a=-b$이고 $b=3-c$이다.
따라서 $a=c-3$이므로 $a<c<b$이다.

답 ④

129

$0<a<1$이고 $-1<b<0$일 때,

$$\sqrt{a-b}\sqrt{b-a}+\sqrt{a-1}\sqrt{1-a}-\sqrt{b}\sqrt{-b}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b+1}}\sqrt{\frac{b+1}{b}}$$

를 간단히 하시오.

주어진 범위를 이용하면

$$a-b>0,\ b-a<0,\ a-1<0,\ 1-a>0,\ b+1>0$$

이다. 따라서 음수의 제곱근을 이용하여 주어진 식을 간단히 할 수 있다.

$$\begin{aligned}&\sqrt{a-b}\sqrt{b-a}+\sqrt{a-1}\sqrt{1-a}-\sqrt{b}\sqrt{-b}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b+1}}\sqrt{\frac{b+1}{b}}\\&=\sqrt{-(a-b)^2}+\sqrt{-(1-a)^2}-\sqrt{-b^2}-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b+1}}\frac{\sqrt{b+1}}{\sqrt{b}}\\&=(a-b)i+(1-a)i-(-b)i-1=-1+i\end{aligned}$$

답 $-1+i$

130

복소수 $z=\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{-5}}+\sqrt{-12}\sqrt{3}+\sqrt{-8}\sqrt{-2}$일 때, $z+\overline{z}$의 값을 구하시오. (단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

음수의 제곱근을 이용하면

$$\begin{aligned}z&=-\sqrt{\frac{20}{-5}}+\sqrt{(-12)\cdot3}-\sqrt{(-8)\cdot(-2)}\\&=-\sqrt{-4}+\sqrt{-36}-\sqrt{16}\\&=-2i+6i-4=-4+4i\end{aligned}$$

이므로 $z+\overline{z}=(-4+4i)+(-4-4i)=-8$이다.

답 -8

개념

07. 허수단위 i의 거듭제곱

131

$z=\dfrac{1+i}{1-i}$에 대하여 $z^n+z^{2n}+z^{3n}=3$이 성립하도록 하는 100 이하의 자연수 n의 개수를 구하시오.

$z=\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=i$이다.

$$z^n+z^{2n}+z^{3n}=i^n+i^{2n}+i^{3n}=i^n+(-1)^n+(-i)^n$$

이므로 k가 음이 아닌 정수일 때,

(i) $n=4k+1$이면 $i^n+(-1)^n+(-i)^n=i-1-i=-1$

(ii) $n=4k+2$이면 $i^n+(-1)^n+(-i)^n=-1+1-1=-1$

(iii) $n=4k+3$이면 $i^n+(-1)^n+(-i)^n=-i-1+i=-1$

(iv) $n=4k+4$이면 $i^n+(-1)^n+(-i)^n=1+1+1=3$

(i)~(iv)에서 n이 4의 배수일 때 $z^n+z^{2n}+z^{3n}=3$이 성립하므로 100 이하의 자연수 중 4의 배수는 25개이다.

답 25

132 중요

$i-2i^2+3i^3-4i^4+\cdots+65i^{65}-66i^{66}=a+bi$를 만족하는 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

허수단위 i의 거듭제곱을 이용하면 주어진 식을 다음과 같이 간단히 할 수 있다.

$$\begin{aligned}&i-2i^2+3i^3-4i^4+\cdots+65i^{65}-66i^{66}\\&=(i-2i^2+3i^3-4i^4)+(5i^5-6i^6+7i^7-8i^8)\\&\quad+\cdots+(61i^{61}-62i^{62}+63i^{63}-64i^{64})+65i^{65}-66i^{66}\\&=(i+2-3i-4)+(5i+6-7i-8)+\cdots+(61i+62-63i-64)+65i+66\\&=\underbrace{(-2-2i)+(-2-2i)+\cdots+(-2-2i)}_{16\text{개}}+65i+66\\&=(-2-2i)\times16+65i+66=34+33i\end{aligned}$$

따라서 $a=34$, $b=33$이므로 구하는 값은 $a+b=34+33=67$이다.

답 67

개념

08. 복소수의 거듭제곱

133

복소수 $z=\dfrac{1+\sqrt{-3}}{1-\sqrt{-3}}$에 대하여

$$(z^2+z^4-z^6)(z+z^2)(1+z^2)(1+z)$$

의 값을 구하시오.

복소수 z는

$$z=\frac{1+\sqrt{-3}}{1-\sqrt{-3}}=\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}=\frac{-2+2\sqrt{3}i}{4}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

에서 $2z+1=\sqrt{3}i$이다. 양변을 제곱하면

$$(2z+1)^2=(\sqrt{3}i)^2 \;\Rightarrow\; z^2+z+1=0 \qquad \cdots ㉠$$

이다. 양변에 $z-1$을 곱하면

$$(z-1)(z^2+z+1)=z^3-1=0 \;\Rightarrow\; z^3=1 \qquad \cdots ㉡$$

이다. 따라서 ㉠, ㉡을 이용하여 주어진 식을 정리하면 구하는 값은

$$\begin{aligned}(z^2+z^4-z^6)(z+z^2)(1+z^2)(1+z)&=(z^2+z-1)\cdot(-1)\cdot(-z)\cdot(-z^2)\\&=(-2)\cdot(-z^3)=2z^3=2\end{aligned}$$

답 2

134

자연수 n에 대하여 $f(n)=\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2n}+\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{4n}$일 때, $f(1)+f(2)+\cdots+f(80)$의 값을 구하시오.

$f(n)$을 간단히 하면

$$\begin{aligned}f(n)&=\left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^n+\left\{\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^{2n}=\left(\frac{1+2i-1}{2}\right)^n+\left(\frac{1-2i-1}{2}\right)^{2n}\\&=i^n+(-i)^{2n}=i^n+(-1)^n\end{aligned}$$

이므로 주어진 식은

$$\begin{aligned}&f(1)+f(2)+\cdots+f(80)\\&=\{i+(-1)\}+\{i^2+(-1)^2\}+\cdots+\{i^{80}+(-1)^{80}\}\\&=(i+i^2+\cdots+i^{79}+i^{80})+\underbrace{\{(-1+1)+\cdots+(-1+1)\}}_{40\text{개}}\\&=i+i^2+\cdots+i^{79}+i^{80}\end{aligned}$$

이다. $i+i^2+i^3+i^4=i-1-i+1=0$임을 이용하면 $i^{80}=(i^4)^{20}$이므로

$$i+i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{77}+i^{78}+i^{79}+i^{80}=0$$

이고 구하는 값은 0이다.

답 0

135 상위 1%

136 이하의 자연수 n에 대하여 $z^n=1$인 서로 다른 복소수를 각각 z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, …, $z_n=1$이라 하자. 다음 조건을 만족시키는 자연수 n의 최댓값을 구하시오.

(가) $z_k=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$인 n 이하의 자연수 k가 존재한다.

(나) $z_l=-z_k$인 n 이하의 자연수 l이 존재한다.

조건 (가)에서

$${z_k}^2=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{1-2\sqrt{3}i+3i^2}{4}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

$${z_k}^3=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^3=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\times\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}=\frac{1-3i^2}{4}=1$$

이므로 ${z_k}^3=1$이다. 즉, $z_k^n=1$을 만족하는 자연수 n은 3의 배수이다. 또한, 조건 (나)에서 $z_l=-z_k$이므로

$${z_l}^n=(-z_k)^n=(-1)^n\times{z_k}^n=(-1)^n\times1$$

이다. 이때 ${z_l}^n=1$이므로 $(-1)^n=1$이다. 따라서 자연수 k는 짝수, 즉 2의 배수이다. 조건 (가), (나)에 대하여 자연수 n은 6의 배수이므로 136 이하의 자연수 중에서 6의 배수의 최댓값은 132이다.

답 132

개념정복

136 마타

정육면체 모양의 주사위에 여섯 개의 수

$$1,\quad \sin 30^\circ,\quad \cos 30^\circ,\quad \sqrt{-1},\quad 1+i,\quad 1+\sqrt{3}i$$

가 적혀 있다. 주사위를 두 번 던졌을 때, 처음 나온 수를 p, 두번째에 나온 수를 q라 하자. p^2q의 값이 실수가 되도록 하는 복소수 p, q의 순서쌍 (p, q)의 개수를 구하시오.

$\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sqrt{-1}=i$임을 이용하면

(i) $p=1$ 또는 $p=\sin 30^\circ$ 또는 $p=\cos 30^\circ$ 또는 $p=\sqrt{-1}$인 경우, p^2이 실수이므로 $q=1$ 또는 $q=\sin 30^\circ$ 또는 $q=\cos 30^\circ$일 때, p^2q의 값은 실수이다. 따라서 순서쌍 (p, q)의 개수는 $4\times3=12$이다.

(ii) $p=1+i$인 경우, $p^2=(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$이므로 $q=\sqrt{-1}$일 때, $p^2q=-2$는 실수이다.

(iii) $p=1+\sqrt{3}i$인 경우, $p^2=-2+2\sqrt{3}i=-2(1-\sqrt{3}i)$이므로 $q=1+\sqrt{3}i$일 때, $p^2q=-8$은 실수이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 복소수 p, q의 순서쌍 (p, q)의 개수는 $12+1+1=14$이다.

답 14

137

다음 두 등식

$$\sqrt{x-1}\sqrt{x-3}=-\sqrt{x^2-4x+3},\quad \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{2x-7}}=-\sqrt{\frac{x+3}{2x-7}}$$

을 만족하는 정수 x의 개수를 구하시오.

두 식을 각각 만족하는 x의 값의 범위를 구하면 다음과 같다.

(i) $\sqrt{x-1}\sqrt{x-3}=-\sqrt{x^2-4x+3}=-\sqrt{(x-1)(x-3)}$에서 $x-1<0$이고 $x-3<0$이므로 $x<1$이다. 등식은 근호 안의 식의 값이 0일 때에도 성립하므로 $x=1$ 또는 $x=3$이다. 따라서 $x\le1$ 또는 $x=3$이다.

(ii) (i)에서 $2x-7<0$이므로 $\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{2x-7}}=-\sqrt{\frac{x+3}{2x-7}}$이면 $x+3\ge0$을 만족한다. 따라서 $x\ge-3$이다.

(i), (ii)에 의하여 두 등식을 동시에 만족하는 x의 값의 범위는 $-3\le x\le1$ 또는 $x=3$이고 정수 x는 -3, -2, -1, 0, 1, 3으로 6개이다.

답 6

138

여덟 개의 복소수 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_8은 각각 1, -1, i, $-i$ 중에서 하나의 값을 가진다. $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_8=5-i$일 때, ${a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2+\cdots+{a_8}^2$의 최댓값을 구하시오.

복소수 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_8은 각각 1, -1, i, $-i$ 중에서 하나의 값을 가지므로 1, -1, i, $-i$의 개수를 각각 a, b, c, d (a, b, c, d는 음이 아닌 정수)라 하면

$$a+b+c+d=8 \quad \cdots ㉠$$

이다. 이때 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_8=5-i$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a-b+(c-d)i=5-i \;\Rightarrow\; a-b=5 \quad \cdots ㉡$$

$$c-d=-1 \quad \cdots ㉢$$

이다. ㉠-㉡-㉢을 하면 $b+d=2$이다. 이때, b, d는 음이 아닌 정수이므로

$$(b, d)=(2, 0),\ (1, 1),\ (0, 2)$$

이다. ㉡, ㉢에 각각 대입하면 다음과 같다.

(i) $(b, d)=(2, 0)$일 때, $a=7$, $c=-1<0$이므로 조건을 만족하지 않는다.

(ii) $(b, d)=(1, 1)$일 때, $a=6$, $c=0$이므로

$${a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2+\cdots+{a_8}^2=6\cdot1^2+1\cdot(-1)^2+0\cdot i^2+1\cdot(-i)^2=6$$

(iii) $(b, d)=(0, 2)$일 때, $a=5$, $c=1$이므로

$${a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2+\cdots+{a_8}^2=5\cdot1^2+0\cdot(-1)^2+1\cdot i^2+2\cdot(-i)^2=2$$

(i)~(iii)에 의하여 구하는 식의 최댓값은 6이다.

답 6

139 마타

0이 아닌 네 실수 a, b, c, d에 대하여 두 복소수 z_1, z_2가

$$z_1=a+bi,\quad z_2=c+di$$

일 때, **[보기]**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, $\overline{z_1}$과 $\overline{z_2}$는 각각 z_1, z_2의 켤레복소수이다.)

[보기]

ㄱ. $z_1=2z_2$이면 $ad-bc=0$이다.

ㄴ. $\overline{iz_1}=\overline{z_2}$이면 $ad-bc>0$이다.

ㄷ. ${z_1}^2-{z_2}^2$이 실수이고 $\frac{z_1}{z_2}$이 실수이면 $z_1=z_2$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

ㄱ. (참) $z_1=2z_2$이면 $a+bi=2c+2di$에서 $a=2c$이고 $b=2d$이다. 따라서 $ad-bc=2c\cdot d-2d\cdot c=2cd-2cd=0$이다.

ㄴ. (참) $\overline{iz_1}=\overline{ai+bi^2}=\overline{-b+ai}=-b-ai$이므로 $\overline{iz_1}=\overline{z_2}$이면 $-b-ai=c-di$에서 $b=-c$, $a=d$이다. 따라서 $ad-bc=d^2+c^2>0$이다.

ㄷ. (거짓) 【반례】 $z_1=1+i$, $z_2=-1-i$라 하면 ${z_1}^2-{z_2}^2=(1+i)^2-(-1-i)^2=0$은 실수이고 $\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+i}{-1-i}=-1$도 실수이지만 $z_1\ne z_2$이다.

답 ③

140 마타

자연수 n에 대하여 $f(n)$이 다음과 같다.

$$f(n)=\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{2}{i^3}+\frac{2}{i^4}+\cdots+\frac{n}{i^{2n-1}}+\frac{n}{i^{2n}}$$

$f(2a)=13+13i$를 만족시키는 자연수 a에 대하여 $f(a)f(a+1)$의 값을 구하시오.

복소수의 거듭제곱을 이용하여 $f(n)$을 전개하면

$$\begin{aligned}f(n)&=\frac{i+1}{i^2}+2\left(\frac{i+1}{i^4}\right)+3\left(\frac{i+1}{i^6}\right)+\cdots+n\left(\frac{i+1}{i^{2n}}\right)\\&=-(i+1)+2(i+1)-3(i+1)+4(i+1)+\cdots+(-1)^n\cdot n(i+1)\\&=\{-1+2-3+4+\cdots+(-1)^n\cdot n\}\cdot(i+1)\end{aligned}$$

이다. $f(1)=-(1+i)$이고 자연수 k에 대하여 두 가지의 경우로 나누어 생각하자.

(i) $n=2k$일 때,

$$\begin{aligned}f(n)&=\{-1+2-3+4+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot(n-1)+(-1)^n\cdot n\}\cdot(i+1)\\&=[(-1+2)+(-3+4)+\cdots+\{-(n-1)+n\}](i+1)\\&=\underbrace{(1+1+\cdots+1)}_{\frac{n}{2}\text{개}}(i+1)=\frac{n}{2}(i+1)=k(i+1)\end{aligned}$$

이므로 $f(n)=f(2k)=k(i+1)$이다.

(ii) $n=2k+1$일 때,

$$\begin{aligned}f(n)&=\{-1+2-3+4+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot(n-1)+(-1)^n\cdot n\}\cdot(i+1)\\&=[(-1+2)+(-3+4)+\cdots+\{-(n-2)+(n-1)\}-n](i+1)\\&=\underbrace{(1+1+\cdots+1}_{\frac{n-1}{2}\text{개}}-n)(i+1)=-\frac{n+1}{2}(i+1)=-(k+1)(i+1)\end{aligned}$$

이므로 $f(n)=f(2k+1)=-(k+1)(i+1)$이다.

(i), (ii)에 의하여 $f(2a)=13+13i$를 만족시키는 자연수 a의 값은 13이므로

$$\begin{aligned}f(13)f(14)&=f(2\cdot6+1)f(2\cdot7)\\&=-(6+1)(i+1)\cdot7(i+1)=-49\cdot(i+1)^2=-98i\end{aligned}$$

답 $-98i$

서 술 형

• 풀이 과정에 점수가 부여되니 풀이 과정 및 정답을 상세하게 서술하세요.

141

서로 다른 세 복소수 x, y, z가

$$x^2-yz=2i,\quad y^2-zx=2i,\quad z^2-xy=2i$$

를 만족할 때, $x^2+y^2+z^2$의 값을 구하시오.

세 관계식을 각각

$$\begin{cases} x^2-yz=2i & \cdots ㉠ \\ y^2-zx=2i & \cdots ㉡ \\ z^2-xy=2i & \cdots ㉢ \end{cases}$$

라 하자. ㉠−㉡을 하면

$$x^2-y^2+(x-y)z=(x-y)(x+y+z)=0$$

이고 $x\neq y$이므로 $x+y+z=0$이다. [40%]

㉠+㉡+㉢에서

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz=(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)=6i$$

이므로 $xy+yz+zx=-2i$이다. [40%]

따라서 구하는 값은

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=4i$$

이다. [20%]

답 $4i$

142

복소수 $z=(x-3)+(x-1)i$와 그 켤레복소수 $\overline{z}$에 대하여

$$\overline{z}^2-xz+2x=2-6i$$

가 성립할 때, 실수 x의 값을 구하시오.

z의 켤레복소수는 $\overline{z}=(x-3)-(x-1)i$이다. [20%]

주어진 식의 좌변을 항별로 전개하면

$$\overline{z}^2=(x-3)^2-2(x-1)(x-3)i+(x-1)^2i^2$$

$$xz=x(x-3)+x(x-1)i$$

이므로 $\overline{z}^2-xz+2x$를 실수부분과 허수부분으로 나누어 전개하면

$$\overline{z}^2-xz+2x=-(x^2-x-8)-(3x^2-9x+6)i$$

이다. [40%]

$\overline{z}^2-xz+2x$의 실수부분이 2이고, 허수부분이 -6이므로

$$x^2-x-8=-2 \quad\Rightarrow\quad (x+2)(x-3)=0$$

$$3x^2-9x+6=6 \quad\Rightarrow\quad 3x(x-3)=0$$

이 성립한다. 따라서 주어진 조건을 만족시키는 실수 x의 값은 3이다. ... [40%]

답 3

143 단계형

자연수 n에 대하여 $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$이 다음과 같다.

$$f(n)=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$g(n)=i^n+(-1)^{f(n)}$$

$$h(n)=g(1)+g(2)+g(3)+\cdots+g(n)$$

다음 물음에 답하시오.

(1) $g(n)$이 양수가 되는 100 이하의 자연수 n의 개수를 구하시오.

(2) $h(n)=0$이 되는 자연수 n의 최솟값을 구하시오.

(3) $h(2018)$의 값을 구하시오.

(1) 자연수 n, k에 대하여 $g(n)$의 값을 다음과 같이 나누어 구할 수 있다.

(i) $n=4k-3$일 때,

$$f(n)=\frac{(4k-3)(4k-2)}{2}=(4k-3)(2k-1)=8k^2-10k+3$$

은 홀수이므로 $(-1)^{f(n)}=-1$이고, $g(n)=i^{4k-3}-1=i-1$이다.

(ii) $n=4k-2$일 때,

$$f(n)=\frac{(4k-2)(4k-1)}{2}=(2k-1)(4k-1)=8k^2-6k+1$$

은 홀수이므로 $(-1)^{f(n)}=-1$이고, $g(n)=i^{4k-2}-1=-1-1=-2$이다.

(iii) $n=4k-1$일 때,

$$f(n)=\frac{(4k-1)\cdot 4k}{2}=8k^2-2k$$

는 짝수이므로 $(-1)^{f(n)}=1$이고, $g(n)=i^{4k-1}+1=-i+1$이다.

(iv) $n=4k$일 때,

$$f(n)=\frac{4k\cdot(4k+1)}{2}=8k^2+2k$$

는 짝수이므로 $(-1)^{f(n)}=1$이고, $g(n)=i^{4k}+1=2$이다.

따라서 (i)~(iv)에 의하여 n이 4의 배수일 때만 $g(n)$이 양수이므로 100 이하의 자연수 중에서 4의 배수의 개수는 25이다.

(2) $g(n)=i^n+(-1)^{f(n)}$의 값을 차례로 나열하면

$$-1+i,\quad -2,\quad 1-i,\quad 2,\quad -1+i,\quad -2,\quad 1-i,\quad 2,\ldots$$

와 같이 반복된다. 이때

$$h(1)=g(1)=-1+i$$

$$h(2)=g(1)+g(2)=-3+i$$

$$h(3)=g(1)+g(2)+g(3)=-2$$

$$h(4)=g(1)+g(2)+g(3)+g(4)=0$$

에서 $h(n)=0$이 되는 자연수 n의 최솟값은 4이다.

(3) $g(n)$의 값이 4를 주기로 반복되므로

$$g(1)=g(5)=g(9)=\cdots=g(2013)=g(2017)$$

$$g(2)=g(6)=g(10)=\cdots=g(2014)=g(2018)$$

$$g(3)=g(7)=g(11)=\cdots=g(2015)$$

$$g(4)=g(8)=g(12)=\cdots=g(2016)$$

이다. 한편, $h(4)=g(1)+g(2)+g(3)+g(4)=0$이므로 $g(1)+g(2)+\cdots+g(2016)=0$이다. 따라서 구하는 값은

$$h(2018)=g(2017)+g(2018)=g(1)+g(2)=-1+i-2=-3+i$$

이다.

답 (1) 25 (2) 4 (3) $-3+i$

05 이차방정식

01 이차방정식의 풀이

1. 인수분해를 먼저 시도하고 인수분해가 되지 않으면 근의 공식을 이용한다.

2. 근의 공식: 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근은 $\boldsymbol{x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$

3. 절댓값 기호를 포함한 방정식

$|x|$와 $|x-a|$는 절댓값 안의 식이 0이 되는 값을 기준으로 다음과 같이 나누어 푼다.

(1) $|x|=\begin{cases} x & (x\geq 0\text{일 때}) \\ -x & (x<0\text{일 때}) \end{cases}$

(2) $|x-a|=\begin{cases} x-a & (x\geq a\text{일 때}) \\ -x+a & (x<a\text{일 때}) \end{cases}$

02 이차방정식의 판별식

1. 판별식: 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에 대하여 판별식은 $\boldsymbol{D=b^2-4ac}$

2. 근의 판별: a, b, c가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 하면

(1) $D>0 \iff$ 이차방정식은 서로 다른 두 실근

(2) $D=0 \iff$ 이차방정식은 중근 (서로 같은 두 실근)

(3) $D<0 \iff$ 이차방정식은 서로 다른 두 허근

03 이차방정식의 근과 계수의 관계

1. 이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

2. 두 수를 근으로 하는 이차방정식

x^2의 계수가 1이고 두 수 α, β를 근으로 하는 이차방정식은

$$x^2-(\underbrace{\alpha+\beta}_{\text{두 근의 합}})x+\underbrace{\alpha\beta}_{\text{두 근의 곱}}=0$$

3. 이차방정식의 두 근을 이용한 이차식의 인수분해

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

4. 이차방정식의 켤레근

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에 대하여

(1) a, b, c가 유리수일 때, 이차방정식의 한 근이 $p+q\sqrt{m}$이면 $p-q\sqrt{m}$도 근이다.
(단, p, q는 유리수, $\sqrt{m}$은 무리수이다.)

(2) a, b, c가 실수일 때, 이차방정식의 한 근이 $p+qi$이면 $p-qi$도 근이다.
(단, p, q는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

마·타·노·트

▶ **이차방정식** $ax^2+bx+c=0$

$ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 이차방정식일 때, $a\neq 0$이다.

▶ $b=2b'$**인 경우 근의 공식**

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

▶ **절댓값** $|x|$

수직선의 원점에서 실수 x에 대응되는 점까지의 거리를 실수 x의 절댓값이라 하고, 기호로 $|x|$로 나타낸다.

▶ **판별식** $D=0$**을 이용하는 경우**

1. 이차방정식이 중근을 가질 때
2. 이차식이 완전제곱식이 될 때
3. x, y에 대한 이차식이 x, y의 두 일차식의 곱으로 인수분해될 때

▶ $b=2b'$**인 경우 판별식**

$$\frac{D}{4}=b'^2-ac$$

▶ **두 근의 차**

α, β가 실수일 때,

$$|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}$$

144 2010학년도 11월 교육청

개념 03, 04

x에 대한 이차방정식 $4x^2+2(2k+m)x+k^2-k+n=0$이 실수 k의 값에 관계없이 중근을 가질 때, $m+n$의 값은? (단, m, n은 실수이다.)

① $-\frac{3}{4}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

주어진 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, 이차방정식이 중근을 가지므로

$$\frac{D}{4}=(2k+m)^2-4(k^2-k+n)=0 \quad \cdots ㉠$$

이고 ㉠을 k에 대하여 정리하면

$$4(m+1)k+m^2-4n=0 \quad \cdots ㉡$$

이다. 이때 등식 ㉡이 k의 값에 관계없이 성립하므로 $m+1=0$, $m^2-4n=0$이다.
따라서 항등식의 성질에 의하여 $m=-1$, $n=\frac{1}{4}$이므로 $m+n=-\frac{3}{4}$이다.

답 ①

145 2009학년도 09월 교육청

개념 01, 05

x에 대한 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이 c와 d일 때, 다음 조건을 만족하는 순서쌍 (a, b)의 개수는? (단, a, b는 상수이다.)

> (가) a, b, c, d는 100 이하의 서로 다른 자연수이다.
> (나) c와 d는 각각 3개의 양의 약수를 가진다.

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

어떤 자연수의 양의 약수의 개수가 홀수 개이면 그 자연수는 완전제곱수인데 그 중 양의 약수의 개수가 3개이면 소수의 제곱수이다. 조건 (나)에 의하여 c, d는

$$2^2,\quad 3^2,\quad 5^2,\quad 7^2$$

중 두 수이다. 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a=c+d,\quad b=cd$$

이고 a, b는 서로 다른 100 이하의 자연수이므로 구하는 순서쌍 (a, b)는

$$(a, b)=(2^2+3^2, 2^2\cdot 3^2),\ (2^2+5^2, 2^2\cdot 5^2)$$

이고 그 개수는 2이다.

답 ②

146 2013학년도 03월 교육청

개념 05

x에 대한 이차방정식 $x^2-ax-3a=0$ $(a>0)$의 서로 다른 두 실근 α, β에 대하여 $|\alpha|+|\beta|=8$일 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값은?

① 34 ② 36 ③ 38
④ 40 ⑤ 42

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=a,\quad \alpha\beta=-3a,\quad |\alpha|+|\beta|=8$$

이 성립한다. $a>0$이므로 $\alpha+\beta>0$이고 $\alpha\beta<0$에서 $\alpha<0<\beta$이므로 곱셈 공식의 변형과 절댓값을 이용하면

$$(|\alpha|+|\beta|)^2=(-\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$
$$=a^2+12a=64$$

이다. 즉,

$$a^2+12a-64=(a-4)(a+16)=0$$

에서 $a>0$이므로 $a=4$이고 구하는 값은

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=a^2+6a=40$$

답 ④

147 2016학년도 06월 교육청

개념 08

세 유리수 a, b, c에 대하여 x에 대한 이차방정식

$$ax^2+\sqrt{3}bx+c=0$$

의 한 근이 $\alpha=2+\sqrt{3}$이다. 다른 한 근을 β라 할 때, $\alpha+\frac{1}{\beta}$의 값은?

① -4 ② $-2\sqrt{3}$ ③ 0
④ $2\sqrt{3}$ ⑤ 4

$t=\sqrt{3}x$를 주어진 방정식에 대입하면

$$\frac{a}{3}t^2+bt+c=0 \quad \Rightarrow \quad at^2+3bt+3c=0$$

이다. 따라서 t에 대한 이차방정식 $at^2+3bt+3c=0$은 한 근이 $t=\sqrt{3}(2+\sqrt{3})=3+2\sqrt{3}$이고 계수 a, $3b$, $3c$가 모두 유리수이므로 다른 한 근은 $t=3-2\sqrt{3}$이다. 따라서 이차방정식 $ax^2+\sqrt{3}bx+c=0$의 다른 한 근은

$$\beta=\frac{t}{\sqrt{3}}=\frac{3-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=-2+\sqrt{3}$$

이므로 구하는 값은

$$\alpha+\frac{1}{\beta}=2+\sqrt{3}+\frac{1}{-2+\sqrt{3}}=0$$

답 ③

개념치료

개념

01. 이차방정식의 풀이

148 중요

x에 대한 이차방정식 $x^2+kx-15=0$의 한 근이 -3일 때, 나머지 한 근을 α라 하자. x에 대한 이차방정식

$$x^2+(k^2+\alpha)x+k\alpha=0$$

을 푸시오. (단, k는 상수이다.)

주어진 근 -3을 이차방정식 $x^2+kx-15=0$에 대입하면

$$9-3k-15=0 \quad \Rightarrow \quad k=-2$$

이다. 따라서

$$x^2+kx-15=x^2-2x-15=(x+3)(x-5)=0$$

에서 나머지 한 근은 $\alpha=5$이다. 따라서 이차방정식

$$x^2+(k^2+\alpha)x+k\alpha=x^2+9x-10=(x-1)(x+10)=0$$

을 풀면 $x=1$ 또는 $x=-10$이다.

답 $x=1$ 또는 $x=-10$

149

이차방정식 $x^2+(1+4i)x-4+2i=0$을 푸시오. (단, $i=\sqrt{-1}$)

이차방정식의 근의 공식을 이용하면

$$\begin{aligned}x&=\frac{-1-4i\pm\sqrt{(1+4i)^2-4(-4+2i)}}{2}\\&=\frac{-1-4i\pm\sqrt{1+8i+16i^2+16-8i}}{2}\\&=\frac{-1-4i\pm1}{2}\end{aligned}$$

이므로 이차방정식의 근은 $x=-2i$ 또는 $x=-1-2i$이다.

답 $x=-2i$ 또는 $x=-1-2i$

150 상위 1%

x에 대한 방정식

$$(a-b)x^2+(b-c)x+(c-a)=0$$

을 푸시오. (단, a, b, c는 상수이다.)

주어진 방정식의 좌변을 인수분해하여 정리하면

$$\begin{aligned}(a-b)x^2+(b-c)x+(c-a)&=(a-b)x^2-(a-b)x-(c-a)x+(c-a)\\&=(a-b)x(x-1)-(c-a)(x-1)\\&=(x-1)\{(a-b)x-(c-a)\}=0\end{aligned}$$

(i) $a\neq b$일 때, 주어진 방정식의 해는 $x=1$ 또는 $x=\dfrac{c-a}{a-b}$이다.

(ii) $a=b$이고 $a\neq c$일 때, $(a-b)x-(c-a)=0$에서 $0\cdot x=c-a$이므로 방정식 $(a-b)x-(c-a)=0$의 해가 존재하지 않는다. 따라서 주어진 방정식의 해는 $x=1$이다.

(iii) $a=b=c$일 때, $(a-b)x-(c-a)=0$에서 $0\cdot x=0$이므로 주어진 방정식의 해는 모든 실수이다.

답 풀이 참조

개념

02. 절댓값 기호를 포함한 방정식

151

x에 대한 방정식 $x^2+k|x|-4=0$의 한 근이 4일 때, 나머지 근을 α라 하자. αk의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.)

주어진 근 4를 방정식 $x^2+k|x|-4=0$에 대입하면 $16+4k-4=0$에서 $k=-3$이다. 따라서 방정식 $x^2-3|x|-4=0$을 계산하면

(i) $x<0$일 때, $|x|=-x$이므로 주어진 방정식은 $x^2+3x-4=0$이다. 따라서

$$x^2+3x-4=(x-1)(x+4)=0$$

에서 $x<0$이므로 $x=-4$이다.

(ii) $x\geq0$일 때, $|x|=x$이므로 주어진 방정식은 $x^2-3x-4=0$이다. 따라서

$$x^2-3x-4=(x+1)(x-4)=0$$

에서 $x\geq0$이므로 $x=4$이다.

(i), (ii)에 의하여 방정식의 나머지 근은 -4이다. 따라서 $\alpha=-4$이므로 구하는 값은 $\alpha k=(-4)\cdot(-3)=12$이다.

답 12

152 중요

방정식 $(x-4)\sqrt{(x+1)^2}+6=0$의 모든 근의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

$\sqrt{(x+1)^2}=|x+1|$이므로 주어진 방정식은 $(x-4)|x+1|+6=0$이다.

(i) $x<-1$일 때, $|x+1|=-x-1$이므로 $x^2-3x-10=0$이다. 따라서

$$x^2-3x-10=(x+2)(x-5)=0$$

에서 $x<-1$이므로 $x=-2$이다.

(ii) $x\geq-1$일 때, $|x+1|=x+1$이므로 $x^2-3x+2=0$이다. 따라서

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)=0$$

에서 $x\geq-1$이므로 $x=1$ 또는 $x=2$이다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 모든 근의 합은 $-2+1+2=1$이다.

답 ①

153

방정식 $x|x-1|+3|x-2|-7=0$의 모든 근의 합을 구하시오.

절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값, 즉 $x=1$, 2를 기준으로 x의 값의 범위를 나눈다.

(i) $x<1$일 때, $|x-1|=-x+1$, $|x-2|=-x+2$이므로 주어진 방정식은

$$-x(x-1)-3(x-2)-7=0 \quad \Rightarrow \quad (x+1)^2=0$$

에서 $x=-1$이다.

(ii) $1\leq x<2$일 때, $|x-1|=x-1$, $|x-2|=-x+2$이므로 주어진 방정식은

$$x(x-1)-3(x-2)-7=0 \quad \Rightarrow \quad x^2-4x-1=0$$

에서 $x=2\pm\sqrt{5}$이고 $2-\sqrt{5}<1$, $2+\sqrt{5}>2$이므로 근이 존재하지 않는다.

(iii) $x\geq2$일 때, $|x-1|=x-1$, $|x-2|=x-2$이므로 주어진 방정식은

$$x(x-1)+3(x-2)-7=0 \quad \Rightarrow \quad x^2+2x-13=0$$

에서 $x=-1\pm\sqrt{14}$에서 $x\geq2$이므로 $x=-1+\sqrt{14}$이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 주어진 방정식의 근은 $x=-1$ 또는 $x=-1+\sqrt{14}$이므로 모든 근의 합은 $-2+\sqrt{14}$이다.

답 $-2+\sqrt{14}$

개념

03. 판별식을 이용한 이차방정식의 근의 판별

154

x에 대한 이차방정식 $x^2+2nx+(n-9)^2=0$이 허근을 가지도록 하는 자연수 n의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

주어진 이차방정식 $x^2+2nx+(n-9)^2=0$의 판별식을 D라 할 때

$$\frac{D}{4}=n^2-(n-9)^2=18n-81<0 \quad \Rightarrow \quad n<\frac{9}{2}$$

이다. 이를 만족시키는 자연수 n은 1, 2, 3, 4이고 그 개수는 4이다.

답 ④

155

x에 대한 두 이차방정식

$$x^2-2x+ab=0, \quad x^2+4x+a+b=0$$

이 모두 중근을 가질 때, 두 상수 a, b에 대하여 a^3+b^3의 값은?

① 44 ② 48 ③ 52
④ 56 ⑤ 60

이차방정식 $x^2-2x+ab=0$의 판별식을 D라 할 때,

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-ab=0 \quad \Rightarrow \quad ab=1$$

이고 이차방정식 $x^2+4x+a+b=0$의 판별식을 D'이라 할 때,

$$\frac{D'}{4}=2^2-(a+b)=0 \quad \Rightarrow \quad a+b=4$$

이다. 이때 곱셈 공식의 변형을 이용하면 구하는 값은

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=4^3-3\cdot1\cdot4=52$$

답 ③

156 중요

x에 대한 이차방정식 $x^2-3x-k+1=0$이 실근을 가지고 x에 대한 이차방정식 $x^2+(k+2)x+4=0$이 중근을 가질 때, 실수 k의 값을 구하시오.

이차방정식 $x^2-3x-k+1=0$의 판별식을 D라 할 때, 이 이차방정식이 실근을 가지므로

$$D=(-3)^2-4(-k+1)=4k+5\geq0 \quad \Rightarrow \quad k\geq-\frac{5}{4} \qquad \cdots \text{㉠}$$

이다. 또한 이차방정식 $x^2+(k+2)x+4=0$의 판별식을 D'이라 할 때, 이 이차방정식이 중근을 가지므로

$$D'=(k+2)^2-16=k^2+4k-12=0 \qquad \cdots \text{㉡}$$

에서 $(k-2)(k+6)=0$이므로 $k=2$ 또는 $k=-6$이다. 이때 ㉠, ㉡을 모두 만족하는 실수 k의 값은 2이다.

답 2

개념

04. 이차식이 완전제곱식이 될 조건

157 중요

x에 대한 이차식 $x^2-2ax+2ak+b+6k$가 k의 값에 관계없이 완전제곱식이 될 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

주어진 이차식이 완전제곱식이면 x에 대한 이차방정식

$$x^2-2ax+2ak+b+6k=0$$

이 중근을 가진다. 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때,

$$\frac{D}{4}=(-a)^2-2ak-b-6k=a^2-b-k(2a+6)=0$$

이다. 이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로 항등식의 성질에 의하여

$$a^2-b=0,\ 2a+6=0 \quad \Rightarrow \quad a=-3,\ b=9$$

이다. 따라서 구하는 값은 $a+b=6$이다.

답 ③

158

삼각형의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여 x에 대한 이차식

$$x^2+2(a+b+c)x+3(ab+bc+ca)$$

가 완전제곱식일 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인지 구하시오.

주어진 이차식이 완전제곱식이면 이차방정식

$$x^2+2(a+b+c)x+3(ab+bc+ca)=0$$

이 중근을 가진다. 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때,

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)\\&=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\\&=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0\end{aligned}$$

이 성립한다. 이때, a, b, c가 모두 실수이므로 $a=b=c$일 때, 주어진 이차식이 완전제곱식이 된다. 따라서 구하는 삼각형은 정삼각형이다.

답 정삼각형

159 상위 1%

x, y에 대한 이차식 $x^2-2xy+5y^2-4x+k$가 두 일차식의 곱으로 인수분해될 때, 실수 k의 값을 구하시오.

주어진 이차식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$x^2-2(y+2)x+5y^2+k$$

이고 x에 대한 이차방정식 $x^2-2(y+2)x+5y^2+k=0$의 해는

$$x=(y+2)\pm\sqrt{-4y^2+4y+4-k}$$

이다. 따라서 주어진 이차식이 두 일차식의 곱으로 인수분해되기 위해서는 근호 안의 식 $-4y^2+4y+4-k$가 완전제곱식이 되어야 한다. 즉, y에 대한 이차방정식 $4y^2-4y-(4-k)=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-2)^2+4(4-k)=20-4k=0$$

에서 $k=5$이다.

답 5

개념

05. 이차방정식의 근과 계수의 관계

160 중요

이차방정식 $x^2-2x+3=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha^4+\beta^4$의 값은?

① -28 ② -14 ③ 14

④ 28 ⑤ 42

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=3$이므로

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4-6=-2$$

이다. 따라서 구하는 식의 값은 다음과 같다.

$$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2$$
$$=(-2)^2-2\cdot3^2=-14$$

답 ②

161

이차방정식 $x^2-3x+3=0$의 두 근이 α, β일 때, $\alpha^4-3\alpha^3-3\beta^2+4\alpha\beta$의 값은?

① 0 ② 3 ③ 6

④ 9 ⑤ 12

이차방정식 $x^2-3x+3=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=3,\quad \alpha\beta=3$$

이다. 또한 α는 $x^2-3x+3=0$의 근이므로 $\alpha^2-3\alpha+3=0$에서 $\alpha^2-3\alpha=-3$이다. 따라서 구하는 값은 다음과 같다.

$$\alpha^4-3\alpha^3-3\beta^2+4\alpha\beta=\alpha^2(\alpha^2-3\alpha)-3\beta^2+4\alpha\beta$$
$$=-3(\alpha^2+\beta^2)+4\alpha\beta=-3\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}+4\alpha\beta$$
$$=-3(3^2-2\cdot3)+4\cdot3=3$$

답 ②

162

이차방정식 $x^2+2x+4=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}+1\right)\left(\beta+\frac{1}{\beta}+1\right)$의 값을 구하시오.

구하는 식을 $\frac{1}{\alpha\beta}$로 묶으면

$$\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}+1\right)\left(\beta+\frac{1}{\beta}+1\right)=\frac{1}{\alpha\beta}(\alpha^2+\alpha+1)(\beta^2+\beta+1)$$

이다. 이때 α, β가 이차방정식 $x^2+2x+4=0$의 두 근이므로

$$\alpha^2+2\alpha+4=0 \Rightarrow \alpha^2=-2\alpha-4$$
$$\beta^2+2\beta+4=0 \Rightarrow \beta^2=-2\beta-4$$

가 성립한다. 또한 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-2,\quad \alpha\beta=4$$

이다. 따라서

$$(\alpha^2+\alpha+1)(\beta^2+\beta+1)=(-\alpha-3)(-\beta-3)$$
$$=\alpha\beta+3(\alpha+\beta)+9=4+3\cdot(-2)+9=7$$

이고 구하는 값은 $\frac{1}{\alpha\beta}(\alpha^2+\alpha+1)(\beta^2+\beta+1)=\frac{7}{4}$이다.

답 $\frac{7}{4}$

163

x에 대한 이차방정식 $kx^2+(3k+1)x-16k=0$의 두 실근의 절댓값의 비가 $1:4$가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 합을 구하시오.

주어진 식이 x에 대한 이차방정식이므로 $k\neq0$이다. 이차방정식의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha\beta=\frac{-16k}{k}=-16<0$이므로 두 근의 부호가 서로 다르다. 이때 두 근의 절댓값의 비가 $1:4$이므로 $\beta=-4\alpha$로 놓을 수 있다. 따라서

$$\alpha\beta=-4\alpha^2=-16 \Rightarrow \alpha^2=4$$

에서 $\alpha=-2$ 또는 $\alpha=2$이다.

(i) $\alpha=-2$일 때, $\beta=8$이고 $\alpha+\beta=6=-\left(3+\frac{1}{k}\right)$에서 $k=-\frac{1}{9}$이다.

(ii) $\alpha=2$일 때, $\beta=-8$이고 $\alpha+\beta=-6=-\left(3+\frac{1}{k}\right)$에서 $k=\frac{1}{3}$이다.

(i), (ii)에 의하여 모든 실수 k의 값의 합은 $\frac{2}{9}$이다.

답 $\frac{2}{9}$

개념

06. 두 수를 근으로 하는 이차방정식

164 중요

이차방정식 $x^2-4x+6=0$의 두 근을 α, β라 할 때, α^2, β^2을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식을 구하시오.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=6$이므로 두 수 α^2, β^2의 합과 곱을 각각 구하면

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=16-2\cdot6=4$$
$$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=36$$

이므로 구하는 이차방정식은 $x^2-4x+36=0$이다.

답 $x^2-4x+36=0$

165

이차방정식 $2x^2+3x+4=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$를 두 근으로 하는 이차방정식은 $2x^2+ax+b=0$이다. 두 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-\frac{3}{2}$, $\alpha\beta=2$이므로 두 수 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 합과 곱을 각각 구하면

$$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=-\frac{3}{2}+2=\frac{1}{2}$$
$$(\alpha+\beta)\alpha\beta=-\frac{3}{2}\cdot2=-3$$

이다. 따라서 두 수 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2-\frac{1}{2}x-3=0$이고 이 방정식의 양변에 2를 곱하면 $2x^2-x-6=0$이다. 따라서 $a=-1$, $b=-6$이고 구하는 값은 $ab=6$이다.

답 6

166

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta=3$이다. 이차방정식 $f(3x-1)=0$의 두 근의 곱이 1일 때, $\alpha\beta$의 값을 구하시오.

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 α, β이므로 $f(\alpha)=f(\beta)=0$에서

$$3\alpha'-1=\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha'=\frac{\alpha+1}{3}$$

$$3\beta'-1=\beta \quad \Rightarrow \quad \beta'=\frac{\beta+1}{3}$$

을 만족시키는 두 수 α', β'가 이차방정식 $f(3x-1)=0$의 근이다. 이차방정식 $f(3x-1)=0$의 두 근의 곱이 1이고 $\alpha+\beta=3$이므로

$$\alpha'\beta'=\frac{\alpha+1}{3}\cdot\frac{\beta+1}{3}=\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{9}$$

$$=\frac{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1}{9}=\frac{\alpha\beta+4}{9}=1$$

에서 $\alpha\beta=5$이다.

답 5

개념

07. 복소수의 범위에서의 인수분해

167 중요

이차식 $5x^2-7x+3$을 복소수의 범위에서 인수분해하면 $a(x+b+ci)(x+b-ci)$이다. 실수 a, b, c에 대하여 $a(b^2-c^2)$의 값을 구하시오. (단, $c>0$이고 $i=\sqrt{-1}$)

근의 공식을 이용하여 이차방정식 $5x^2-7x+3=0$의 해를 구하면 $x=\frac{7\pm\sqrt{11}i}{10}$이다. 따라서 주어진 이차식을 복소수의 범위에서 인수분해하면

$$5x^2-7x+3=5\left(x-\frac{7+\sqrt{11}i}{10}\right)\left(x-\frac{7-\sqrt{11}i}{10}\right)$$

이다. 따라서 $a=5$, $b=-\frac{7}{10}$, $c=\frac{\sqrt{11}}{10}$이므로 구하는 값은

$$a(b^2-c^2)=5\left(\frac{49}{100}-\frac{11}{100}\right)=\frac{19}{10}$$

답 $\frac{19}{10}$

168

사차식 $x(x+2)(x-2)(x-4)-20$을 복소수의 범위에서 인수분해하시오.

주어진 사차식을 공통부분이 나오도록 전개하면

$$x(x-2)(x+2)(x-4)-20=(x^2-2x)(x^2-2x-8)-20$$

이다. 공통부분을 $x^2-2x=X$로 치환하면

$$X(X-8)-20=X^2-8X-20=(X+2)(X-10)$$

$$=(x^2-2x+2)(x^2-2x-10)$$

이다. 이때 근의 공식을 이용하면 이차방정식 $x^2-2x+2=0$의 해는 $x=1\pm i$이고 이차방정식 $x^2-2x-10=0$의 해는 $x=1\pm\sqrt{11}$이다. 따라서 주어진 사차식을 복소수의 범위에서 인수분해하면 다음과 같다.

$$(x-1-i)(x-1+i)(x-1-\sqrt{11})(x-1+\sqrt{11})$$

답 $(x-1-i)(x-1+i)(x-1-\sqrt{11})(x-1+\sqrt{11})$

개념

08. 이차방정식의 켤레근

169 중요

x에 대한 이차방정식 $4x^2+ax+b=0$의 한 근이 $\frac{4}{(1-\sqrt{3})^2}$일 때, 두 유리수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -8 ② -16 ③ -24

④ -32 ⑤ -40

주어진 이차방정식의 한 근이

$$\frac{4}{(1-\sqrt{3})^2}=\frac{4}{4-2\sqrt{3}}=\frac{4(4+2\sqrt{3})}{(4-2\sqrt{3})(4+2\sqrt{3})}=4+2\sqrt{3}$$

이고 이차방정식의 계수가 모두 유리수이므로 $4-2\sqrt{3}$도 이차방정식의 근이다. 따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-\frac{a}{4}=(4+2\sqrt{3})+(4-2\sqrt{3})=8 \quad \Rightarrow \quad a=-32$$

$$\frac{b}{4}=(4+2\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})=4 \quad \Rightarrow \quad b=16$$

이므로 구하는 값은 $a+b=-16$이다.

답 ②

170

x에 대한 이차방정식 $x^2+px+q=0$의 한 근이 $1-3i$일 때, p, q를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2+ax+b=0$이다. 두 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값을 구하시오. (단, p, q는 실수이고 $i=\sqrt{-1}$)

주어진 이차방정식의 계수가 실수이고 한 근이 $1-3i$이므로 다른 한 근은 $1+3i$이다. 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-p=(1-3i)+(1+3i)=2 \quad \Rightarrow \quad p=-2$$

$$q=(1-3i)(1+3i)=1-9i^2=10$$

이므로 $p+q=8$, $pq=-20$이다. 따라서 p, q를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2-8x-20=0$이고 $a=-8$, $b=-20$에서 $a-b=12$이다.

답 12

171

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $2i^{99}+3i^{100}$일 때, 두 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. (단, $i=\sqrt{-1}$)

복소수의 거듭제곱을 이용하면 $i^3=-i$, $i^4=1$이므로

$$i^{99}=(i^4)^{24}\cdot i^3=-i, \quad i^{100}=(i^4)^{25}=1$$

에서 $2i^{99}+3i^{100}=3-2i$이다. 주어진 이차방정식의 계수가 실수이고 한 근이 $3-2i$이므로 다른 한 근은 $3+2i$이다. 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-a=(3-2i)+(3+2i)=6 \quad \Rightarrow \quad a=-6$$

$$b=(3-2i)(3+2i)=9-4i^2=13$$

이므로 구하는 값은 $a+b=7$이다.

답 7

172

x에 대한 이차방정식 $x^2-2ax+a^2+2a-6=0$의 두 근이 모두 정수일 때, 모든 양수 a의 값의 합을 구하시오.

주어진 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, 이 이차방정식이 실근을 가지므로

$$\frac{D}{4}=a^2-a^2-2a+6\geq 0 \quad \Rightarrow \quad a\leq 3$$

이고 a가 양수이므로 $0<a\leq 3$이다. 이때 두 근이 모두 정수이므로 두 근의 합과 곱은 모두 정수이다. 이때 두 근의 합 $2a$가 홀수 $2k-1$ (단, k는 정수)이면,

$$a=\frac{2k-1}{2}$$에서 두 근의 곱 $a^2+2a-6=k^2+k-\frac{27}{4}$

이 정수가 아니다. 따라서 $2a$는 짝수이고 a는 정수이다. $0<a\leq 3$이므로 a는 $a=1$, 2, 3이고 각각의 경우에 대하여 이차방정식을 풀어보면

(i) $a=1$일 때, $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$이다.

(ii) $a=2$일 때, $x^2-4x+2=0$에서 $x=2\pm\sqrt{2}$이다.

(iii) $a=3$일 때, $x^2-6x+9=0$에서 $x=3$(중근)이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 주어진 이차방정식의 두 근이 모두 정수가 되도록 하는 a의 값은 1, 3이고 그 합은 $1+3=4$이다.

답 4

173

x에 대한 이차방정식 $(1+i)x^2+(1-i)x-2-ki=0$이 하나의 실근을 가질 때, 이 이차방정식을 푸시오. (단, $k\neq 0$이고 $i=\sqrt{-1}$)

주어진 이차방정식의 실근을 α라 할 때,

$$(1+i)\alpha^2+(1-i)\alpha-2-ki=(\alpha^2+\alpha-2)+i(\alpha^2-\alpha-k)=0$$

에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$\alpha^2+\alpha-2=0 \quad \cdots ㉠$$

$$\alpha^2-\alpha-k=0 \quad \cdots ㉡$$

이다. ㉠에서 $(\alpha-1)(\alpha+2)=0$이므로 $\alpha=1$ 또는 $\alpha=-2$이다.

(i) $\alpha=1$일 때, ㉡에 대입하면 $k=0$이므로 문제의 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $\alpha=-2$일 때, ㉡에 대입하면 $k=6$이다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 이차방정식은

$$(1+i)x^2+(1-i)x-2-6i=(x+2)\{(1+i)x-(1+3i)\}=0$$

이고 $\frac{1+3i}{1+i}=2+i$이므로 해는 $x=-2$ 또는 $x=2+i$이다.

답 $x=-2$ 또는 $x=2+i$

174 마타

0이 아닌 서로 다른 두 실수 a, b가

$$\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}, \quad \frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a}}=\sqrt{1-\frac{b}{a}}$$

를 만족시키고 x에 대한 두 이차방정식

$$x^2-(a+b)x+9=0, \quad x^2+(a-b)x+1=0$$

이 모두 중근을 가질 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.

$\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이므로 $a<0$, $b<0$이다. 또한 $\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a}}=\sqrt{1-\frac{b}{a}}=\sqrt{\frac{a-b}{a}}$에서 $a<0$이므로 $a-b<0$이다. 이차방정식 $x^2-(a+b)x+9=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때,

$$D=(a+b)^2-36=0 \quad \Rightarrow \quad a+b=\pm 6 \quad \cdots ㉠$$

이고 이차방정식 $x^2+(a-b)x+1=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D'이라 할 때,

$$D'=(a-b)^2-4=0 \quad \Rightarrow \quad a-b=\pm 2 \quad \cdots ㉡$$

이다. $a<0$, $b<0$에서 $a+b<0$이고 문제의 조건에서 $a-b<0$이므로 ㉠, ㉡에서 $a+b=-6$, $a-b=-2$이다. 이 두 식을 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=-2$이므로 구하는 값은 $a^2+b^2=20$이다.

답 20

175 마타

두 양수 p, q에 대하여 이차방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 근이 1, p이다. 이차방정식 $f\left(\frac{x-1}{4}\right)=0$의 두 근이 p^2+4, q일 때, $p+q$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

이차방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 근이 1, p이므로 $f(1)=0$, $f(p)=0$이다. 이때

$$\frac{\alpha-1}{4}=1, \quad \frac{\beta-1}{4}=p$$

를 만족시키는 α, β가 이차방정식 $f\left(\frac{x-1}{4}\right)=0$의 두 근이다. 즉, $\alpha=5$, $\beta=4p+1$에서 $5=p^2+4$, $4p+1=q$ 또는 $5=q$, $4p+1=p^2+4$이다.

(i) $5=p^2+4$, $4p+1=q$일 때, $p^2=1$에서 $p\neq 1$이므로 $p=-1$이고 $q=-3$이다. 이때 p, q가 양수가 아니므로 문제의 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $5=q$, $4p+1=p^2+4$일 때, $p^2-4p+3=(p-1)(p-3)=0$에서 $p\neq 1$이므로 $p=3$이다. 이때 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에 의하여 $p=3$, $q=5$이므로 $p+q=8$이다.

답 ④

176

이차방정식 $x^2-3x+5=0$의 두 근을 α, β라 하자. 이차식 $f(x)$에 대하여

$$f(\alpha)=\beta, \quad f(\beta)=\alpha, \quad f(1)=8$$

일 때, $f(3)$의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

이차방정식 $x^2-3x+5=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=3$이다. 이때, $f(\alpha)=\beta$, $f(\beta)=\alpha$이므로

$$f(\alpha)=3-\alpha \quad \Rightarrow \quad f(\alpha)+\alpha-3=0$$

$$f(\beta)=3-\beta \quad \Rightarrow \quad f(\beta)+\beta-3=0$$

이다. 즉, α, β는 이차방정식 $f(x)+x-3=0$의 두 근이다.

$$f(x)+x-3=k(x^2-3x+5) \quad (\text{단, } k\neq 0)$$

라 하고 양변에 $x=1$을 대입하면

$$f(1)+1-3=k(1-3+5)=3k$$

에서 $f(1)=8$이므로 $k=2$이다. 따라서

$$f(x)+x-3=2(x^2-3x+5)$$

에서 $f(x)=2x^2-7x+13$이고 구하는 값은 $f(3)=18-21+13=10$이다.

답 ①

서 술 형

• 풀이 과정에 점수가 부여되니 풀이 과정 및 정답을 상세하게 서술하세요.

177

x에 대한 방정식

$$(k^2-3k+2)x^2+2(k-1)x-4=0$$

의 실근이 한 개일 때, 실수 k의 값을 모두 구하시오. (단, 중근은 1개의 실근으로 생각한다.)

주어진 방정식은

$$(k-1)(k-2)x^2+2(k-1)x-4=0$$

이므로 다음과 같이 세 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) $k=1$일 때, 주어진 방정식은 $0\cdot x^2+0\cdot x-4=0$이므로 성립하지 않는다. [25%]

(ii) $k=2$일 때, $0\cdot x^2+2x-4=0$이므로 $x=2$이다. 따라서 주어진 방정식의 실근이 한 개이다. [25%]

(iii) $k\neq1$이고 $k\neq2$일 때, 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(k-1)^2+4(k^2-3k+2)$$
$$=(k-1)^2+4(k-1)(k-2)$$
$$=(k-1)(5k-9)$$

이다. 이때 주어진 이차방정식이 중근을 가지므로 $\frac{D}{4}=0$이다. 즉 $(k-1)(5k-9)=0$이고 $k\neq1$이므로 구하는 실수 k의 값은 $\frac{9}{5}$이다. .. [40%]

(i)~(iii)에 의하여 구하는 실수 k의 값은 2 또는 $\frac{9}{5}$이다. [10%]

답 2 또는 $\frac{9}{5}$

178

x^2의 계수가 1인 이차방정식 $f(x)+27=0$의 두 근이 3, 5일 때, 방정식 $f(|x-1|)=0$의 모든 실근의 합을 구하시오.

x^2의 계수가 1인 이차방정식 $f(x)+27=0$의 두 근이 3, 5이므로

$$f(x)+27=(x-3)(x-5) \Rightarrow f(x)=x^2-8x-12$$

로 놓을 수 있다. [30%]

근의 공식을 이용하여 이차방정식 $x^2-8x-12=0$의 해를 구하면

$$x=4\pm\sqrt{(-4)^2+12}=4\pm2\sqrt{7}$$

이다. [10%]

방정식 $f(|x-1|)=0$의 근은 방정식 $|x-1|=4\pm2\sqrt{7}$을 만족시키는 근과 일치한다.

이때, 실수 x에 대하여 $|x-1|\geq0$이므로 $|x-1|=4+2\sqrt{7}$이다. [30%]

절댓값을 풀면 $x-1=4+2\sqrt{7}$ 또는 $x-1=-4-2\sqrt{7}$이므로 $x=5+2\sqrt{7}$ 또는 $x=-3-2\sqrt{7}$이다. 따라서 구하는 두 실근의 합은

$$(5+2\sqrt{7})+(-3-2\sqrt{7})=2$$

이다. [30%]

답 2

179 단계형

이차방정식 $2x^2-\sqrt{2}x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 각각 구하시오.

(2) $4\alpha^4+2\alpha^2$의 값을 구하시오.

(3) $(1+\alpha+2\alpha^2+3\alpha^3+4\alpha^4)(1+\beta+2\beta^2+3\beta^3+4\beta^4)$의 값을 구하시오.

(1) 이차방정식 $2x^2-\sqrt{2}x+1=0$의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \alpha\beta=\frac{1}{2}$$

(2) α가 주어진 이차방정식의 근이므로

$$2\alpha^2-\sqrt{2}\alpha+1=0 \Rightarrow 2\alpha^2+1=\sqrt{2}\alpha$$

이다. 양변을 제곱하여 정리하면

$$(2\alpha^2+1)^2=2\alpha^2 \Rightarrow 4\alpha^4+2\alpha^2+1=0 \quad \cdots ㉠$$

에서 $4\alpha^4+2\alpha^2=-1$이다.

(3) ㉠에서 α, β가 주어진 이차방정식의 근이므로

$$4\alpha^4+2\alpha^2+1=0,\quad 4\beta^4+2\beta^2+1=0$$

이다. 따라서 구하는 값은

$$(1+\alpha+2\alpha^2+3\alpha^3+4\alpha^4)(1+\beta+2\beta^2+3\beta^3+4\beta^4)$$
$$=(\alpha+3\alpha^3)(\beta+3\beta^3)=\alpha\beta(1+3\alpha^2)(1+3\beta^2)$$
$$=\alpha\beta\{1+3(\alpha^2+\beta^2)+9(\alpha\beta)^2\}$$
$$=\alpha\beta\{1+3(\alpha+\beta)^2-6\alpha\beta+9(\alpha\beta)^2\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+3\cdot\frac{1}{2}-6\cdot\frac{1}{2}+9\cdot\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{8}$$

답 (1) $\alpha+\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\alpha\beta=\frac{1}{2}$ (2) -1 (3) $\frac{7}{8}$

06 이차방정식과 이차함수

01 이차방정식과 이차함수

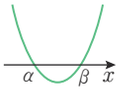
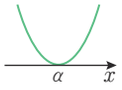
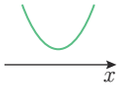
1. 이차방정식과 이차함수의 관계

(1) 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표

$\Longleftrightarrow$ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근

(2) 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계

$\Longleftrightarrow$ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식 $D=b^2-4ac$의 부호에 따라 결정

$a>0$	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$ax^2+bx+c=0$의 근	서로 다른 두 실근	서로 같은 두 실근 (중근)	서로 다른 두 허근
x축과의 위치 관계	서로 다른 두 점에서 만난다.	한 점에서 만난다. (접한다.)	만나지 않는다.
$y=ax^2+bx+c$ 의 그래프			

2. 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 위치 관계는 방정식 $ax^2+(b-m)x+(c-n)=0$의 판별식 $D=(b-m)^2-4a(c-n)$의 부호에 따라 결정

(1) $\boldsymbol{D>0}$ **일 때**: 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $\boldsymbol{D=0}$ **일 때**: 한 점에서 만난다. (접한다.)

(3) $\boldsymbol{D<0}$ **일 때**: 만나지 않는다.

02 이차함수의 최대, 최소

1. 이차함수의 최대, 최소

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$는

(1) $a>0$일 때: $x=p$에서 최솟값 q, 최댓값은 없다.

(2) $a<0$일 때: $x=p$에서 최댓값 q, 최솟값은 없다.

2. 제한된 범위에서 이차함수의 최대, 최소

$\alpha\le x\le\beta$에서 이차함수 $f(x)=a(x-p)^2+q$의 최댓값과 최솟값은

(1) $\alpha\le p\le\beta$일 때, $f(p)$, $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값

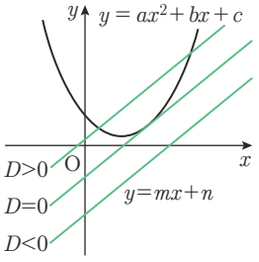
(2) $p<\alpha$ 또는 $p>\beta$일 때, $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중에서 큰 값이 최댓값, 작은 값이 최솟값

마·타·노·트

▶ **이차함수의 그래프와 x축과의 교점의 개수**

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근의 개수와 같다.

▶ **이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계**



▶ **이차함수의 최대, 최소의 활용**

최대, 최소의 활용문제는 문제에서 별도로 언급하지 않은 조건도 따져보아야 한다.

180 2010학년도 11월 교육청

개념 01

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점 $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$에서 만나고 $\alpha+\beta=20$일 때, 방정식 $f(2x-5)=0$의 모든 실근의 합을 구하시오.

이차함수 $f(x)$에 대하여 이차방정식 $f(x)=0$의 두 실근은 α, β이다. 방정식 $f(2x-5)=0$의 두 실근을 α', β'라 할 때,

$$2\alpha'-5=\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha'=\frac{\alpha+5}{2}$$

$$2\beta'-5=\beta \quad \Rightarrow \quad \beta'=\frac{\beta+5}{2}$$

로 놓을 수 있다. 따라서 구하는 값은

$$\alpha'+\beta'=\frac{\alpha+5}{2}+\frac{\beta+5}{2}=\frac{(\alpha+\beta)+10}{2}=\frac{20+10}{2}=15$$

답 15

181 2015학년도 06월 교육청

개념 01

이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=0$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq f(3)$이다.

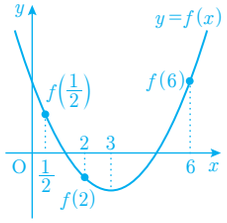
[보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[보기]

ㄱ. $f(5)=0$
ㄴ. $f(2)<f\left(\frac{1}{2}\right)<f(6)$
ㄷ. $f(0)=k$라 할 때, x에 대한 방정식 $f(x)=kx$의 두 실근의 합은 11이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

조건 (나)에서 이차함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq f(3)$이므로 $x=3$에서 최솟값을 가지고, $x=3$이 대칭축이며 아래로 볼록이다.
ㄱ. (참) $x=3$이 대칭축이고 $f(1)=0$이므로 $f(5)=0$이다.
ㄴ. (참) 그림과 같이 이차함수 $f(x)$가 $x=3$에 대칭이고 아래로 볼록이므로 $f(2)<f\left(\frac{1}{2}\right)<f(6)$이다.



ㄷ. (참) $f(x)=0$의 두 근이 1, 5이므로

$$f(x)=a(x-1)(x-5)$$
$$=a(x^2-6x+5)=ax^2-6ax+5a$$

이다. $f(0)=k$이므로 $k=5a$이다. $f(x)=kx$에서

$$ax^2-6ax+5a=5ax$$

이고 $a>0$이므로 $x^2-11x+5=0$이다. 따라서 실근의 합은 11이다.

답 ⑤

182 2017학년도 06월 교육청

개념 02, 05

최고차항의 계수가 a $(a>0)$인 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 직선 $y=4ax-10$과 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 두 점의 x좌표는 1과 5이다.
(나) $1\leq x\leq 5$에서 $f(x)$의 최솟값은 -8이다.

$100a$의 값을 구하시오.

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=4ax-10$의 교점의 x좌표가 1, 5이므로 이차방정식 $f(x)=4ax-10$의 두 실근은 1, 5이다. $f(x)$의 이차항의 계수가 a이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$f(x)-4ax+10=a(x^2-6x+5)$$

로 놓을 수 있다. 따라서

$$f(x)=ax^2-6ax+5a+4ax-10$$
$$=ax^2-2ax+5a-10=a(x-1)^2+4a-10$$

이다. 한편, $a>0$이고 $1\leq x\leq 5$에서 $f(x)$의 최솟값이 -8이므로 $f(1)=-8$이다. 따라서

$$f(1)=4a-10=-8 \quad \Rightarrow \quad a=\frac{1}{2}$$

이므로 구하는 값은 $100a=100\times\frac{1}{2}=50$이다.

답 50

183 2015학년도 06월 교육청

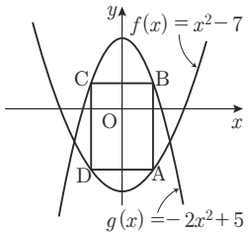
개념 01, 08

두 이차함수

$$f(x)=x^2-7, \quad g(x)=-2x^2+5$$

가 있다. 오른쪽 그림과 같이 네 점

$$A(a,\ f(a)), \quad B(a,\ g(a))$$
$$C(-a,\ g(-a)), \quad D(-a,\ f(-a))$$



를 꼭짓점으로 하는 직사각형 ABCD의 둘레의 길이가 최대가 되도록 하는 a의 값을 구하시오. (단, $0<a<2$이다.)

$f(x)=x^2-7$, $g(x)=-2x^2+5$이므로

$$\overline{AD}=\overline{BC}=\{a-(-a)\}=2a$$
$$\overline{BA}=\overline{CD}=g(a)-f(a)=(-2a^2+5)-(a^2-7)=-3a^2+12$$

이다. 따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이를 $h(a)$라 하면

$$h(a)=\overline{AD}+\overline{BC}+\overline{BA}+\overline{CD}=2(\overline{AD}+\overline{BA})$$
$$=2(2a-3a^2+12)=-6a^2+4a+24$$
$$=-6\left(a-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{74}{3}$$

이다. 따라서 $a=\frac{1}{3}$일 때, 직사각형 ABCD의 둘레의 길이가 최대이다.

답 $\frac{1}{3}$

개념 치료

개념

01. 이차방정식과 이차함수의 관계

184 중요

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 꼭짓점의 좌표가 $(2, 4)$이고 x축과 두 점 A, B에서 만난다. $\overline{AB}=8$일 때, 세 상수 a, b, c의 곱 abc의 값은?

① $-\frac{1}{4}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{3}{4}$

④ -1 ⑤ $-\frac{5}{4}$

꼭짓점의 좌표가 $(2, 4)$인 이차함수를 $y=a(x-2)^2+4$로 놓으면 축의 방정식이 $x=2$이고 $\overline{AB}=8$이므로 $A(-2, 0)$, $B(6, 0)$으로 놓을 수 있다. 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 점 $A(-2, 0)$을 지나므로 $0=a(-2-2)^2+4$에서 $a=-\frac{1}{4}$이다. 따라서 주어진 이차함수는

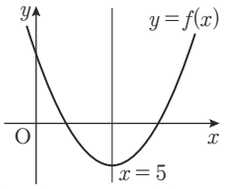
$$y=-\frac{1}{4}(x-2)^2+4=-\frac{1}{4}x^2+x+3$$

에서 $a=-\frac{1}{4}$, $b=1$, $c=3$이고 구하는 값은 $abc=-\frac{3}{4}$이다.

답 ③

185

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같이 직선 $x=5$에 대하여 대칭이고 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다. 방정식 $f(2x-2)=0$의 두 근의 합을 구하시오.



이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=5$이므로 교점의 x좌표는 각각 $5-t$, $5+t$로 놓을 수 있다. (단, $t>0$) 따라서 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 각각 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 $\alpha+\beta=(5-t)+(5+t)=10$이다. 이때, 방정식 $f(2x-2)=0$의 두 근을 각각 α', β' $(\alpha'<\beta')$라 하면

$$2\alpha'-2=\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha'=\frac{\alpha+2}{2}$$

$$2\beta'-2=\beta \quad \Rightarrow \quad \beta'=\frac{\beta+2}{2}$$

이다. 따라서 방정식 $f(2x-2)=0$의 두 근의 합은

$$\alpha'+\beta'=\frac{\alpha+2}{2}+\frac{\beta+2}{2}=\frac{(\alpha+\beta)+4}{2}=\frac{14}{2}=7$$

답 7

개념

02. 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

186

이차함수 $y=x^2+2ax+a^2-3a$의 그래프와 직선 $y=-x+2$가 적어도 한 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

이차함수의 식과 직선의 방정식을 연립하면 x에 대한 이차방정식 $x^2+(2a+1)x+a^2-3a-2=0$을 얻는다. 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=(2a+1)^2-4(a^2-3a-2)\geq 0 \quad \Rightarrow \quad a\geq -\frac{9}{16}$$

이다. 따라서 조건을 만족하는 실수 a의 값의 범위는 $a\geq -\frac{9}{16}$이다.

답 $a\geq -\frac{9}{16}$

187 중요

이차함수 $y=-x^2-ax$의 그래프와 직선 $y=x+3$이 만나는 두 점의 x좌표의 합을 S_1이라 하고 y좌표의 합을 S_2라 할 때, $S_1S_2=16$이다. 양수 a의 값을 구하시오.

이차함수 $y=-x^2-ax$의 그래프와 직선 $y=x+3$이 만나는 두 점의 좌표를 각각 $(\alpha, \alpha+3)$, $(\beta, \beta+3)$이라 할 때,

$$-x^2-ax=x+3 \quad \Rightarrow \quad x^2+(a+1)x+3=0$$

에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-a-1$이다. 이때

$$S_1=\alpha+\beta=-a-1, \quad S_2=(\alpha+3)+(\beta+3)=-a+5$$

에서 $S_1S_2=(-a-1)(-a+5)=16$이므로 전개하여 정리하면

$$a^2-4a-21=(a+3)(a-7)=0$$

이다. a가 양수이므로 구하는 값은 7이다.

답 7

188 중요

이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프와 직선 $y=x+2$가 만나는 한 점의 x좌표가 $3+\sqrt{2}$일 때, 두 유리수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프와 직선 $y=x+2$가 만나는 한 점의 x좌표가 $3+\sqrt{2}$이므로 x에 대한 이차방정식

$$x^2+ax+b=x+2 \quad \Rightarrow \quad x^2+(a-1)x+b-2=0$$

의 한 근이 $3+\sqrt{2}$이다. 이때 이차방정식의 모든 계수가 유리수이므로 $3-\sqrt{2}$도 근이다. 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-(a-1)=(3+\sqrt{2})+(3-\sqrt{2}) \quad \Rightarrow \quad a=-5$$

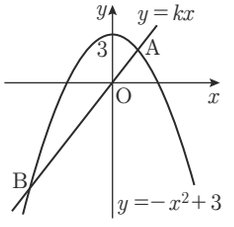
$$b-2=(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2}) \quad \Rightarrow \quad b=9$$

이다. 따라서 구하는 값은 $a+b=4$이다.

답 ④

189

오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=-x^2+3$의 그래프와 직선 $y=kx$가 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, $\overline{OA}=\overline{OB}=1:3$이 되도록 하는 양수 k의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)



$\overline{OA}=\overline{OB}=1:3$이므로 두 점 A, B의 x좌표는 각각 a, $-3a$ (단, $a>0$)으로 놓을 수 있다. 즉 a, $-3a$는 x에 대한 이차방정식

$$-x^2+3=kx \quad \Rightarrow \quad x^2+kx-3=0$$

의 두 근이다. 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a+(-3a)=-k, \quad a\cdot(-3a)=-3$$

이다. 이때 $a^2=1$에서 $a>0$이므로 $a=1$이고 구하는 값은 $k=2a=2$이다.

답 2

개념

03. 이차함수의 접선

190 중요

이차함수 $y=x^2+2kx+k^2+4k+1$의 그래프와 직선 $y=ax+b$가 실수 k의 값에 관계없이 항상 접할 때, 두 상수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① 4 ② 8 ③ 12
④ 16 ⑤ 20

이차함수 $y=x^2+2kx+k^2+4k+1$의 그래프와 직선 $y=ax+b$가 접하므로 x에 대한 이차방정식

$$x^2+2kx+k^2+4k+1=ax+b \quad \Rightarrow \quad x^2+(2k-a)x+k^2+4k+1-b=0$$

의 판별식을 D라 하면

$$D=(2k-a)^2-4(k^2+4k+1-b)=(-4a-16)k+a^2+4b-4=0$$

이다. 이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로 항등식의 성질에 의하여

$$-4a-16=0, \quad a^2+4b-4=0$$

이고 두 식을 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=-3$이다. 따라서 구하는 값은 $ab=12$이다.

답 ③

191

이차함수 $y=x^2+4x+2$의 그래프에 접하는 직선 $y=ax+b$가 직선 $y=2x-3$에 평행할 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

직선 $y=ax+b$가 $y=2x-3$과 서로 평행하므로 $a=2$이다. 직선 $y=2x+b$가 이차함수 $y=x^2+4x+2$의 그래프와 접하므로 이차방정식

$$x^2+4x+2=2x+b \quad \Rightarrow \quad x^2+2x+2-b=0$$

의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=1-2+b=0$$

에서 $b=1$이다. 따라서 구하는 값은 $a+b=3$이다.

답 ③

개념

04. 이차함수의 최대, 최소

192

이차함수 $f(x)=x^2+2ax+4a+3$의 최솟값을 $g(a)$라 할 때, $g(a)$의 최댓값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

이차함수 $f(x)$를 표준형으로 변형하면

$$f(x)=(x^2+2ax)+4a+3=(x+a)^2-a^2+4a+3$$

이므로 $x=-a$일 때, 최솟값 $f(-a)=-a^2+4a+3$을 가진다. 따라서

$$g(a)=-a^2+4a+3=-(a-2)^2+7$$

이므로 $g(a)$는 $a=2$일 때, 최댓값 7을 가진다.

답 ②

193

이차함수 $y=ax^2+2ax+a^2$가 최솟값 12를 가지고, 이차함수 $y=bx^2-4bx+b^2+6b$가 최댓값 $2a$를 가질 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

이차함수 $y=ax^2+2ax+a^2$을 표준형으로 변형하면

$$y=a(x+1)^2+a^2-a$$

이다. 이 함수가 최솟값을 가지므로 $a>0$이고 $a^2-a=12$이다. 따라서

$$a^2-a-12=(a-4)(a+3)=0$$

에서 $a>0$이므로 $a=4$이다. 한편, 이차함수 $y=bx^2-4bx+b^2+6b$를 표준형으로 변형하면

$$y=b(x-2)^2+b^2+2b$$

이다. 이 함수가 최댓값을 가지므로 $b<0$이고 $b^2+2b=2a=8$이다. 따라서

$$b^2+2b-8=(b+4)(b-2)=0$$

에서 $b<0$이므로 $b=-4$이고 구하는 값은 $a+b=0$이다.

답 0

194 중요

두 이차함수 $f(x)=2x^2-4x-5$, $g(x)=-x^2-2ax-a^2-2a$가 임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)\ge g(x_2)$를 만족시킬 때, 정수 a의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)\ge g(x_2)$를 만족하려면 $f(x)$의 최솟값이 $g(x)$의 최댓값보다 크거나 같아야 한다. 즉,

$$f(x)=2x^2-4x-5=2(x-1)^2-7$$

$$g(x)=-x^2-2ax-a^2-2a=-(x+a)^2-2a$$

에서 $f(x)$의 최솟값은 -7이고 $g(x)$의 최댓값은 $-2a$이다. $-7\ge-2a$에서 $a\ge\frac{7}{2}$이므로 정수 a의 최솟값은 4이다.

답 ④

195

이차함수 $y=x^2+(2a-1)x+a-3$의 그래프가 x축과 두 점에서 만날 때, 두 교점 사이의 거리의 최솟값을 구하시오.

이차함수 $y=x^2+(2a-1)x+a-3$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표를 각각 α, β라 할 때, α, β는 x에 대한 이차방정식 $x^2+(2a-1)x+a-3=0$의 두 근이다. 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-2a+1, \quad \alpha\beta=a-3$$

이고 두 교점 사이의 거리가 $|\alpha-\beta|$이므로 곱셈 공식의 변형에 의하여

$$|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{(-2a+1)^2-4(a-3)}$$

$$=\sqrt{4a^2-8a+13}=\sqrt{4(a-1)^2+9}$$

이다. 따라서 두 교점 사이의 거리는 $a=1$일 때 최솟값 $\sqrt{9}=3$을 가진다.

답 3

개념

05. 제한된 범위에서 이차함수의 최대, 최소

196

$0 \le x \le 3$에서 이차함수 $y=x^2-4x+k+7$의 최댓값이 10일 때, 이차함수의 최솟값을 구하시오.

이차함수 $y=x^2-4x+k+7$을 표준형으로 변형하면

$$y=(x-2)^2+k+3$$

이다. 이때 꼭짓점의 x좌표 2가 주어진 범위에 포함되므로 $x=2$일 때 최솟값 $k+3$을 가지고, $x=0$ 또는 $x=3$일 때 최댓값을 가진다. 따라서

$$x=0\text{일 때} \Rightarrow (0-2)^2+k+3=k+7$$

$$x=3\text{일 때} \Rightarrow (3-2)^2+k+3=k+4$$

에서 주어진 이차함수의 최댓값은 $k+7=10$이므로 $k=3$이고 최솟값은 $k+3=6$

답 6

197 중요

$a \le x \le 5$에서 이차함수 $f(x)=x^2-2x+b+1$의 최댓값은 20, 최솟값은 8일 때, 양수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8

④ 9 ⑤ 10

이차함수 $f(x)$를 표준형으로 변형하면

$$f(x)=x^2-2x+b+1=(x-1)^2+b$$

이다. 주어진 범위 $a \le x \le 5$에서 a가 $a \le 5$인 양수이므로

(i) $0<a \le 1$일 때, 꼭짓점의 x좌표가 주어진 범위에 포함된다. 따라서 주어진 이차함수의 최댓값은 $f(5)=16+b=20$에서 $b=4$이고 최솟값은 $f(1)=b=4 \ne 8$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $1<a \le 5$일 때, 주어진 이차함수의 최댓값은 $f(5)=16+b=20$에서 $b=4$이고 최솟값은

$$f(a)=a^2-2a+b+1=8 \Rightarrow a^2-2a-3=(a+1)(a-3)=0$$

에서 a가 양수이므로 $a=3$이다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 값은 $a+b=7$이다.

답 ②

198

$-4 \le x \le 5$에서 함수 $y=x^2-4|x|-3$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3

④ -4 ⑤ -5

$f(x)=x^2-4|x|-3$이라 하자. 절댓값 안의 식이 0이 되는 값을 기준으로 범위를 $-4 \le x<0$, $0 \le x<5$으로 나누어 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구하면 다음과 같다.

(i) $-4 \le x<0$일 때, $|x|=-x$이므로 $f(x)=x^2+4x-3=(x+2)^2-7$이다. 포물선의 꼭짓점의 x좌표가 $-4 \le x<0$에 포함되므로 $f(x)$의 최솟값은 $f(-2)=-7$이고 $f(-4)=-3$, $f(0)=-3$이므로 $f(x)$의 최댓값은 -3이다.

(ii) $0 \le x \le 5$일 때, $|x|=x$이므로 $f(x)=x^2-4x-3=(x-2)^2-7$이다. 포물선의 꼭짓점의 x좌표가 $0 \le x \le 5$에 포함되므로 $f(x)$의 최솟값은 $f(2)=-7$이고 $f(0)=-3$, $f(5)=2$이므로 $f(x)$의 최댓값은 2이다.

(i), (ii)에서 $-4 \le x \le 5$에서 $M=2$이고 $m=-7$이므로 구하는 값은 $M+m=2-7=-5$이다.

답 ⑤

개념

06. 치환을 이용한 이차함수의 최대, 최소

199 중요

함수 $y=(x^2-2x)^2+4(x^2-2x)+7$은 $x=a$에서 최솟값 b를 가질 때, ab의 값을 구하시오.

$x^2-2x=X$로 치환하면 $X=x^2-2x=(x-1)^2-1$이므로 $X \ge -1$이다. 한편 주어진 함수는

$$y=(x^2-2x)^2+4(x^2-2x)+7$$

$$=X^2+4X+7=(X+2)^2+3$$

이고 $X \ge -1$이므로 주어진 함수는 $X=-1$일 때 최솟값 4를 가진다. 이때

$$X=x^2-2x=-1 \Rightarrow x^2-2x+1=(x-1)^2=0$$

이므로, $x=1$일 때 최솟값을 가진다. 즉, $a=1$, $b=4$이므로 구하는 값은 $ab=4$

답 4

200

$1 \le x \le 2$에서 함수

$$y=(x^2+2x-3)^2+6(x^2+2x)-9$$

의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오.

$x^2+2x-3=X$로 치환하면

$$X=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$$

이고 $1 \le x \le 2$이므로 $0 \le X \le 5$이다. 이때, 주어진 함수는

$$y=(x^2+2x-3)^2+6(x^2+2x)-9$$

$$=X^2+6(X+3)-9=X^2+6X+9=(X+3)^2$$

이다. 주어진 함수는 $X=5$일 때 최댓값 $M=64$를 가지고, $X=0$일 때 최솟값 $m=9$를 가진다. 따라서 구하는 값은 $M+m=73$이다.

답 73

201 상위1%

$1 \le x \le 4$에서 함수 $y=-(x^2-4x+3)^2+2a(x^2-4x+3)+5$의 최댓값이 9일 때, 모든 상수 a의 값의 합을 구하시오.

$x^2-4x+3=X$로 치환하면

$$X=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$$

이고 $1 \le x \le 4$이므로 $-1 \le X \le 3$이다. 이때, 주어진 함수는

$$y=-(x^2-4x+3)^2+2a(x^2-4x+3)+5$$

$$=-X^2+2aX+5=-(X-a)^2+a^2+5$$

이다. a의 값의 범위에 따라 y의 최댓값이 9가 되는 상수 a의 값을 구하면

(i) $a<-1$인 경우, $X=-1$일 때 최댓값을 가진다. 따라서 $-1-2a+5=9$에서 $a=-\frac{5}{2}$이다.

(ii) $-1 \le a<3$인 경우, $X=a$일 때 최댓값을 가진다. 따라서 $a^2+5=9$에서 $-1 \le a<3$이므로 $a=2$이다.

(iii) $a \ge 3$인 경우, $X=3$일 때 최댓값을 가진다. 따라서 $-9+6a+5=9$이고 $a=\frac{13}{6}<3$이므로 조건을 만족시키는 a가 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 모든 a의 값의 합은 $-\frac{5}{2}+2=-\frac{1}{2}$이다.

답 $-\frac{1}{2}$

개념

07. 조건식이 주어진 이차식의 최대, 최소

202 중요

$x+y=3$을 만족시키는 음이 아닌 두 실수 x, y에 대하여 x^2+2y^2의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값은?

① 102 ② 104 ③ 106

④ 108 ⑤ 110

$x=3-y\geq 0$이므로 $0\leq y\leq 3$이다. $x=3-y$를 주어진 식에 대입하면

$$x^2+2y^2=(3-y)^2+2y^2=3y^2-6y+9=3(y-1)^2+6$$

에서 $y=1$일 때 최솟값이 $m=6$이고, $y=3$일 때 최댓값이 $M=18$이다. 따라서 구하는 값은 $Mm=108$이다.

답 ④

203

두 실수 a, b에 대하여 $2a-b=4$가 성립한다. ab의 최솟값과 최댓값을 각각 m, M이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오. (단, $0\leq b\leq 4$)

$b=2a-4$이고 $0\leq b\leq 4$이므로 $2\leq a\leq 4$이다. $b=2a-4$를 ab에 대입하면

$$ab=a(2a-4)=2a^2-4a=2(a-1)^2-2$$

에서 $a=2$일 때, 최솟값이 $m=0$이고 $a=4$일 때, 최댓값이 $M=16$이다. 따라서 구하는 값은 $M+m=16$이다.

답 16

204

양수 x, y가 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=6$을 만족시킬 때, $\frac{(x+1)(y-1)}{xy}$의 최댓값을 구하시오.

$\frac{1}{x}=X$, $\frac{1}{y}=Y$로 치환하면 $x>0$, $y>0$이므로 $X>0$, $Y>0$이다. 또한, $Y=6-X$이므로 $6-X>0$에서 $X<6$이다. 따라서 $0<X<6$이다. 이때

$$\frac{(x+1)(y-1)}{xy}=\left(\frac{x+1}{x}\right)\left(\frac{y-1}{y}\right)=\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{y}\right)$$
$$=(1+X)(1-Y)=(1+X)\{1+(6-X)\}$$
$$=-(X+1)(X-7)=-X^2+6X+7=-(X-3)^2+16$$

이다. 따라서 $X=3$, 즉 $x=\frac{1}{3}$일 때 주어진 식은 최댓값 16을 가진다.

답 16

개념

08. 이차함수의 최대, 최소의 활용

205

지면으로부터 80 m의 높이에서 초속 30 m로 똑바로 위로 던질 때, t초 후의 공의 지면으로부터 높이를 y m라 하면

$$y=-5t^2+30t+80$$

의 관계식이 성립한다. 이 공이 가장 높이 올라갔을 때, 지면으로부터 높이를 구하시오.

주어진 식은 t에 대한 이차함수이므로 표준형으로 변형하면

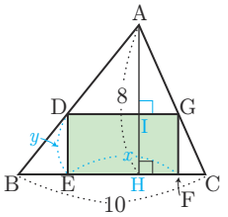
$$y=-5t^2+30t+80=-5(t-3)^2+125$$

이므로 함수 y는 $t=3$일 때, 최댓값 125를 가진다. 따라서 공은 3초 후에 125 m로 가장 높이 올라간다.

답 125 m

206

오른쪽 그림과 같이 밑변의 길이가 10, 높이가 8인 삼각형 ABC에 내접하는 직사각형 DEFG가 있다. 직사각형 DEFG의 넓이의 최댓값을 구하시오.



점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 점 H라 하고 점 A에서 선분 DG에 내린 수선의 발을 점 I라 하자. 삼각형 ABC와 삼각형 ADG는 닮음이므로 $\overline{BC}:\overline{DG}=\overline{AH}:\overline{AI}$이다. 직사각형 DEFG의 가로의 길이를 x, 세로의 길이를 y라 하면

$$10:x=8:(8-y) \quad \Rightarrow \quad 8x=80-10y$$

에서 $x=\frac{40-5y}{4}$이다. 직사각형 DEFG의 넓이는 xy이므로

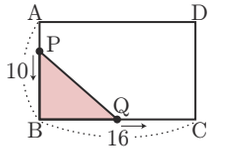
$$xy=\frac{40-5y}{4}\cdot y=\frac{-5y^2+40y}{4}=\frac{-5(y-4)^2+80}{4}$$

이다. y는 직사각형의 한변의 길이이므로 $0<y<8$이고 $y=4$일 때 xy는 최댓값 20을 가진다. 따라서 직사각형 DEFG의 넓이는 가로의 길이가 5이고 세로의 길이가 8일 때, 최댓값 20을 가진다.

답 20

207 중요

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=10$, $\overline{BC}=16$인 직사각형 ABCD가 있다. 점 P는 점 A에서 변 AB를 따라 매초 1의 속력으로 점 B로 이동하고, 점 Q는 점 B에서 출발하여 변 BC를 따라 매초 2의 속력으로 점 C로 이동한다. t초 후의 두 점 P, Q와 점 B를 세 꼭짓점으로 하는 삼각형 PBQ의 넓이의 최댓값을 구하시오. (단, $0<t<8$)



t초 후의 두 점 P, Q에 대하여

$$\overline{BP}=10-t, \quad \overline{BQ}=2t$$

이므로 삼각형 PBQ의 넓이는

$$\frac{1}{2}\overline{BP}\cdot\overline{BQ}=\frac{1}{2}(10-t)\cdot 2t$$
$$=-t(t-10)=-(t-5)^2+25$$

이다. 따라서 $t=5$일 때, 삼각형 PBQ의 넓이의 최댓값은 25이다.

답 25

208

이차함수 $f(x)=x^2-2ax+b$가 $x\le 2$에서 최솟값 m을 가지고 $2a-b\ge -4$일 때, m의 최댓값을 구하시오.

이차함수 $f(x)$를 표준형으로 변형하면

$$f(x)=x^2-2ax+b=(x-a)^2-a^2+b$$

이다. a의 값의 범위를 나누면

(i) $a<2$일 때, $x\le 2$에서 이차함수 $f(x)$의 최솟값은 $m=f(a)=-a^2+b$이다. 이때 $b\le 2a+4$이므로

$$m=-a^2+b\le -a^2+2a+4=-(a-1)^2+5$$

이다. 따라서 $a=1$, $b=6$일 때, m의 최댓값은 5이다.

(ii) $a\ge 2$일 때, $x\le 2$에서 이차함수 $f(x)$의 최솟값은 $m=f(2)=4-4a+b$이다. 따라서

$$m=4-4a+b\le 4-4a+2a+4=-2a+8\le 4$$

이다. 따라서 $a=2$, $b=8$일 때, m의 최댓값은 4이다.

(i), (ii)에 의하여 m의 최댓값은 5이다.

답 5

209 마테

이차함수 $f(x)=x^2-6x+a$의 그래프가 두 직선 $y=g(x)+4$, $y=g(x)-2x$에 접할 때, 직선 $y=g(x)$의 기울기를 구하시오.

$g(x)=mx+n$이라 할 때, 이차함수 $f(x)=x^2-6x+a$의 그래프와 직선 $y=g(x)+4$가 접하므로 $f(x)=g(x)+4$에서

$$x^2-6x+a=mx+n+4 \quad\Rightarrow\quad x^2-(m+6)x+a-n-4=0$$

이다. 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때,

$$D=(m+6)^2-4(a-n-4)=0 \quad\Rightarrow\quad (m+6)^2-4(a-n)+16=0 \quad\cdots\ ㉠$$

이다. 또한 이차함수 $f(x)=x^2-6x+a$의 그래프와 직선 $y=g(x)-2x$가 접하므로 $f(x)=g(x)-2x$에서

$$x^2-6x+a=mx+n-2x \quad\Rightarrow\quad x^2-(m+4)x+a-n=0$$

이고 이 이차방정식의 판별식을 D'이라 할 때,

$$D'=(m+4)^2-4(a-n)=0 \quad\Rightarrow\quad 4(a-n)=(m+4)^2 \quad\cdots\ ㉡$$

이다. 이때 ㉠에 ㉡을 대입하면 $(m+6)^2-(m+4)^2+16=0$에서 $4m+36=0$이므로 직선 $y=g(x)$의 기울기는 $m=-9$이다.

답 −9

210 마테

등식 $3x+4y=-7$을 만족시키는 음수 x, y에 대하여 $(\sqrt{3x-2}+\sqrt{4y-1})^2$의 최솟값을 구하시오.

$x<0$, $y<0$이므로 $3x-2<0$, $4y-1<0$이다. 음수의 제곱근의 성질에 의하여

$$\sqrt{3x-2}\sqrt{4y-1}=-\sqrt{(3x-2)(4y-1)}$$

이므로 주어진 식을 정리하면

$$(\sqrt{3x-2}+\sqrt{4y-1})^2=3x-2+4y-1-2\sqrt{(3x-2)(4y-1)}$$

이고 $3x+4y=-7$에서 $4y-1=-3x-8$을 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned}&3x-2+4y-1-2\sqrt{(3x-2)(4y-1)}\\&=3x-2-3x-8-2\sqrt{(3x-2)(-3x-8)}\\&=-10-2\sqrt{-9x^2-18x+16}\\&=-10-2\sqrt{-9(x+1)^2+25}\end{aligned}$$

이다. 이때, $y<0$에서 $x>-\frac{7}{3}$이므로 $-\frac{7}{3}<x<0$에서 주어진 식은 $x=-1$일 때, 최솟값 −20을 가진다.

답 −20

211

$0\le x\le 2$에서 이차함수 $f(x)=-x^2+2ax-a^2$의 최댓값을 M이라 하고 최솟값을 m이라 할 때, $M-m=4$가 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

$f(x)=-(x-a)^2$이므로 함수 $f(x)$의 꼭짓점의 좌표는 $(a, 0)$이다.

$$f(0)=-a^2,\quad f(a)=0,\quad f(2)=-a^2+4a-4$$

에서 a의 값의 범위를 나누어 최댓값과 최솟값을 구하면

(i) $a<0$일 때, 최댓값은 $f(0)$이고 최솟값은 $f(2)$이므로

$$M-m=f(0)-f(2)=-a^2-(-a^2+4a-4)=4$$

에서 $a=0$이다. 이때, $a<0$이므로 이를 만족하는 a의 값은 없다.

(ii) $0\le a<1$일 때, 최댓값은 $f(a)$이고 최솟값은 $f(2)$이므로

$$M-m=f(a)-f(2)=0-(-a^2+4a-4)=4$$

에서 $a(a-4)=0$이다. 이때, $0\le a<1$이므로 $a=0$이다.

(iii) $1\le a<2$일 때, 최댓값은 $f(a)$이고 최솟값은 $f(0)$이므로

$$M-m=f(a)-f(0)=0-(-a^2)=4$$

에서 $a^2=4$이다. 이때, $1\le a<2$이므로 이를 만족하는 a의 값은 없다.

(iv) $a\ge 2$일 때, 최댓값은 $f(2)$이고 최솟값은 $f(0)$이므로

$$M-m=f(2)-f(0)=-a^2+4a-4-(-a^2)=4$$

에서 $a=2$이다.

(i)~(iv)에 의하여 조건을 만족하는 모든 실수 a의 값은 0, 2이다. 따라서 모든 실수 a의 값은 0, 2이고 그 합은 $0+2=2$이다.

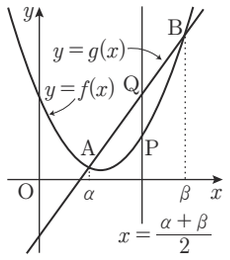
답 ②

212

오른쪽 그림과 같이 두 함수

$$f(x)=2x^2+ax+b,\quad g(x)=2x+c$$

의 그래프의 두 교점 A, B의 x좌표가 각각 α, β이고 직선 $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$가 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{PQ}=10$일 때, 선분 AB의 길이를 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)



이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 2이므로

$$f(x)-g(x)=2(x-\alpha)(x-\beta) \quad\cdots\ ㉠$$

이다. 이때 $\overline{PQ}=10$이므로 $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=-10$이다. ㉠에 $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$를 대입하면

$$\begin{aligned}f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)&=2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha\right)\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\beta\right)\\&=-2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2=-10\end{aligned}$$

에서 $|\alpha-\beta|=2\sqrt{5}$이다. 따라서 일차함수 $g(x)$의 기울기가 2이므로 피타고라스의 정리를 이용하면 $\overline{AB}=\sqrt{1^2+2^2}\cdot|\alpha-\beta|=10$이다.

답 10

서 술 형

• 풀이 과정에 점수가 부여되니 풀이 과정 및 정답을 상세하게 서술하세요.

213

이차방정식 $x^2-4x+2=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 할 때, 이차함수 $y=x^2-ax+b$의 그래프가 두 점 (α, β), (β, α)를 지난다. 두 상수 a, b의 값을 각각 구하시오.

이차방정식 $x^2-4x+2=0$의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=4, \quad \alpha\beta=2$$

이다. [20%]

이차함수 $y=x^2-ax+b$가 두 점 (α, β), (β, α)를 지나므로

$$\alpha^2-a\alpha+b=\beta \quad \cdots ㉠$$

$$\beta^2-a\beta+b=\alpha \quad \cdots ㉡$$

이다. [30%]

㉠+㉡을 하면

$$\alpha^2+\beta^2-a(\alpha+\beta)+2b=\alpha+\beta$$

$$16-4-4a+2b=4 \quad \Rightarrow \quad 2a-b=4 \quad \cdots ㉢$$

이고 ㉠−㉡을 하면

$$\alpha^2-\beta^2-a(\alpha-\beta)=\beta-\alpha$$

이다. 이때 $\alpha\neq\beta$이므로 양변을 $\alpha-\beta$로 나누면

$$\alpha+\beta-a=-1 \quad \Rightarrow \quad 4-a=-1$$

에서 $a=5$이다. 이를 ㉢에 대입하면 $b=6$이다. [50%]

답 $a=5$, $b=6$

214

$0\le x\le 3$에서 이차함수 $f(x)=-2x^2+4ax-a^2-a$의 최댓값이 6이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 합을 구하시오.

이차함수 $f(x)$를 표준형으로 변형하면

$$f(x)=-2x^2+4ax-a^2-a=-2(x-a)^2+a^2-a$$

이다. [15%]

$0\le x\le 3$에서 이차함수 $f(x)$의 최댓값을 M이라 하면

(i) $a\le 0$일 때,

$$M=f(0)=-a^2-a=6 \quad \Rightarrow \quad a^2+a+6=0$$

이다. 이차방정식 $a^2+a+6=0$의 판별식을 D라 할 때, $D=1^2-24=-23<0$

이므로 실수 a의 값은 존재하지 않는다. [25%]

(ii) $0<a\le 3$일 때,

$$M=f(a)=a^2-a=6 \quad \Rightarrow \quad a^2-a-6=(a-3)(a+2)=0$$

이고 $0<a\le 3$이므로 $a=3$이다. [25%]

(iii) $a>3$일 때,

$$M=f(3)=-18+12a-a^2-a=6 \quad \Rightarrow \quad a^2-11a+24=(a-3)(a-8)=0$$

에서 $a>3$이므로 $a=8$이다. [25%]

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 모든 실수 a의 값의 합은 $3+8=11$이다. ... [10%]

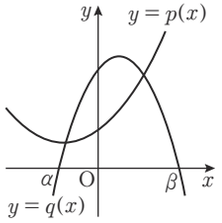
답 11

215 단계형

두 이차함수

$$p(x)=ax^2+bx+c, \quad q(x)=dx^2+ex+f$$

의 그래프가 오른쪽 그림과 같고, 이차함수 $y=q(x)$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표를 각각 α, β라 할 때, 다음 물음에 답하시오. (단, $\alpha<\beta$)



(1) b, e의 부호를 각각 판별하시오.

(2) $a\alpha^2+b\beta+c$와 $d\beta^2+e\alpha+f$의 부호를 각각 판별하시오.

(3) $ae^2+2bde+4cd^2$의 부호를 판별하시오.

(1) 이차함수 $y=p(x)$의 그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$이고 축이 y축의 왼쪽에 있으므로 $-\dfrac{b}{2a}<0$에서 $b>0$이다. 또한 이차함수 $y=q(x)$의 그래프가 위로 볼록하므로 $d<0$이고 축이 y축의 오른쪽에 있으므로 $-\dfrac{e}{2d}>0$에서 $e>0$이다.

(2) 모든 실수 x에 대하여 $p(x)=ax^2+bx+c>0$이므로 $a\alpha^2+b\alpha+c>0$이다. 이때

$$(a\alpha^2+b\beta+c)-(a\alpha^2+b\alpha+c)=b(\beta-\alpha)>0$$

이므로 $a\alpha^2+b\beta+c>a\alpha^2+b\alpha+c>0$이다. 또한 β가 이차방정식 $q(x)=dx^2+ex+f=0$의 근이므로 $d\beta^2+e\beta+f=0$이고

$$(d\beta^2+e\alpha+f)-(d\beta^2+e\beta+f)=e(\alpha-\beta)<0$$

이므로 $d\beta^2+e\alpha+f<0$이다.

(3) $r(e)=ae^2+2bde+4cd^2$으로 놓을 때, e에 대한 이차함수 $r(e)$를 표준형으로 변형하면

$$r(e)=ae^2+2bde+4cd^2=a\left(e+\frac{bd}{a}\right)^2+\frac{d^2(4ac-b^2)}{a}$$

이다. 이때 이차함수 $y=p(x)$의 그래프가 x축과 만나지 않으므로 이차방정식 $p(x)=0$의 판별식을 D라 할 때,

$$D=b^2-4ac<0 \quad \Rightarrow \quad 4ac-b^2>0$$

이다. 따라서 $\dfrac{d^2(4ac-b^2)}{a}>0$이므로 $r(e)=ae^2+2bde+4cd^2>0$이다.

답 (1) $b>0$, $e>0$ (2) $a\alpha^2+b\beta+c>0$, $d\beta^2+e\alpha+f<0$
(3) $ae^2+2bde+4cd^2>0$

07 고차방정식

01 삼차방정식과 사차방정식의 풀이

1. 인수분해를 이용한 풀이

주어진 방정식을 $P(x)=0$의 꼴로 정리한 후, 인수분해 공식을 이용하여 푼다.

2. 인수정리를 이용한 풀이

주어진 방정식을 $P(x)=0$의 꼴로 정리한 후, $P(\alpha)=0$을 만족하는 α의 값을 찾고 조립제법을 이용하여 $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$로 인수분해하여 푼다.

02 삼차방정식의 근과 계수의 관계

1. 삼차방정식의 근과 계수의 관계

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근 α, β, γ에 대하여

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\quad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

2. 세 수를 근으로 하는 삼차방정식

세 수 α, β, γ가 근이고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$$x^3-(\underbrace{\alpha+\beta+\gamma}_{\text{세 근의 합}})x^2+(\underbrace{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}_{\text{두 근끼리의 곱의 합}})x-\underbrace{\alpha\beta\gamma}_{\text{세 근의 곱}}=0$$

3. 삼차방정식의 켤레근

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$에서

(1) a, b, c, d가 유리수일 때, 삼차방정식의 한 근이 $p+q\sqrt{m}$이면 $p-q\sqrt{m}$도 근이다.
(단, p, q는 유리수, $\sqrt{m}$은 무리수이다.)

(2) a, b, c, d가 실수일 때, 삼차방정식의 한 근이 $p+qi$이면 $p-qi$도 근이다.
(단, p, q는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

03 방정식 $x^3=1$, $x^3=-1$의 허근 ω의 성질

1. 방정식 $\boldsymbol{x^3=1}$**의 한 허근**을 $\boldsymbol{\omega}$라 하면 다음을 만족한다. (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

(1) $\omega^3=\overline{\omega}^3=1,\quad \omega^2+\omega+1=\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$

(2) $\omega+\overline{\omega}=-1,\quad \omega\overline{\omega}=1$

(3) $\omega^2=\overline{\omega}=\frac{1}{\omega},\quad \overline{\omega}^2=\omega=\frac{1}{\overline{\omega}}$

2. 방정식 $\boldsymbol{x^3=-1}$**의 한 허근**을 $\boldsymbol{\omega}$라 하면 다음을 만족한다. (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

(1) $\omega^3=\overline{\omega}^3=-1,\quad \omega^2-\omega+1=\overline{\omega}^2-\overline{\omega}+1=0$

(2) $\omega+\overline{\omega}=1,\quad \omega\overline{\omega}=1$

(3) $\omega^2=-\overline{\omega}=-\frac{1}{\omega},\quad \overline{\omega}^2=-\omega=-\frac{1}{\overline{\omega}}$

마·타·노·트

▶ 삼차방정식과 사차방정식의 풀이

주어진 방정식을 $P(x)=0$의 꼴로 정리하고, $P(x)$를 인수분해한 후, 다음과 같은 성질을 이용한다.

(1) $AB=0$이면 $A=0$ 또는 $B=0$이다.

(2) $ABC=0$이면 $A=0$ 또는 $B=0$ 또는 $C=0$이다.

▶ 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$

이차방정식의 경우와 마찬가지로

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

이 x에 대한 삼차방정식일 때, $a\neq0$이다.

216 2015학년도 11월 교육청 개념 01

사차방정식 $(x^2-5x)(x^2-5x+13)+42=0$의 모든 실근의 곱을 구하시오.

주어진 사차방정식

$$(x^2-5x)(x^2-5x+13)+42=0$$

에서 $x^2-5x=X$로 치환하면

$$X(X+13)+42=X^2+13X+42=0 \quad \Rightarrow \quad (X+6)(X+7)=0$$

이다. 이때 $X=x^2-5x$이므로

$$\begin{aligned}(X+6)(X+7)&=(x^2-5x+6)(x^2-5x+7)\\&=(x-2)(x-3)(x^2-5x+7)=0\end{aligned}$$

이다. 따라서 $x=2$ 또는 $x=3$ 또는 $x^2-5x+7=0$이다. 이때 이차방정식 $x^2-5x+7=0$의 판별식을 D라 하면 $D=25-28=-3<0$이므로 이차방정식 $x^2-5x+7=0$은 허근을 가진다. 따라서 모든 실근의 곱은 $2\times3=6$이다.

답 6

217 2011학년도 11월 교육청 개념 04, 05

세 실수 a, b, c에 대하여 다항식 $P(x)=x^3-ax^2+bx-c$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $2+i$는 삼차방정식 $P(x)=0$의 근이다.
(나) $P(x)$를 일차식 $x-1$로 나눈 나머지는 1이다.

이때, $a+b+c$의 값을 구하시오. (단, $i=\sqrt{-1}$)

조건 (가)에 의하여 $2+i$가 삼차방정식 $P(x)=0$의 근이고 삼차방정식의 계수는 모두 실수이므로 $2-i$도 방정식 $P(x)=0$의 근이다. 삼차방정식 $P(x)=0$의 또 다른 한 근을 α라 하면

$$\begin{aligned}P(x)&=x^3-ax^2+bx-c\\&=(x-2-i)(x-2+i)(x-\alpha)\\&=(x^2-4x+5)(x-\alpha)\end{aligned}$$

이다. 조건 (나)에 의하여 $P(1)=2(1-\alpha)=1$이므로 $\alpha=\frac{1}{2}$이고

$$P(x)=(x^2-4x+5)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

이다. $P(-1)=-15$이고 $P(x)=x^3-ax^2+bx-c$에서

$$P(-1)=-1-a-b-c=-15$$

이다. 따라서 구하는 값은 $a+b+c=14$이다.

답 14

218 2017학년도 11월 교육청 개념 06

삼차방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라 할 때, **[보기]**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

[보기]

ㄱ. $\overline{\omega}^3=1$
ㄴ. $\frac{1}{\omega}+\left(\frac{1}{\omega}\right)^2=\frac{1}{\overline{\omega}}+\left(\frac{1}{\overline{\omega}}\right)^2$
ㄷ. $(-\omega-1)^n=\left(\frac{\overline{\omega}}{\omega+\overline{\omega}}\right)^n$을 만족시키는 100 이하의 자연수 n의 개수는 50이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

삼차방정식 $x^3=1$의 한 허근이 ω이므로 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$에서 $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$이 성립한다.
ㄱ. (참) ω의 켤레복소수 $\overline{\omega}$는 $x^3=1$의 다른 한 근이므로 $\overline{\omega}^3=1$이다.
ㄴ. (참) $\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$이므로

$$\frac{1}{\omega}+\left(\frac{1}{\omega}\right)^2=\frac{\omega+1}{\omega^2}=\frac{-\omega^2}{\omega^2}=-1,\quad \frac{1}{\overline{\omega}}+\left(\frac{1}{\overline{\omega}}\right)^2=\frac{\overline{\omega}+1}{\overline{\omega}^2}=\frac{-\overline{\omega}^2}{\overline{\omega}^2}=-1$$

ㄷ. (참) $(-\omega-1)^n=(\omega^2)^n$이고

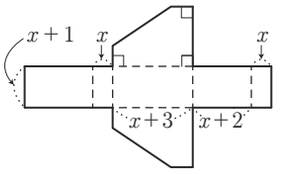
$$\left(\frac{\overline{\omega}}{\omega+\overline{\omega}}\right)^n=(-\overline{\omega})^n=\left(-\frac{1}{\omega}\right)^n=(-1)^n\times\left(\frac{1}{\omega}\right)^n=(-1)^n\times(\omega^2)^n$$

이므로 $(-\omega-1)^n=\left(\frac{\overline{\omega}}{\omega+\overline{\omega}}\right)^n$일 때, $(\omega^2)^n=(-1)^n\times(\omega^2)^n$에서 $1=(-1)^n$이다. 따라서 n은 짝수이고, 100 이하의 짝수 n의 개수는 50이다.

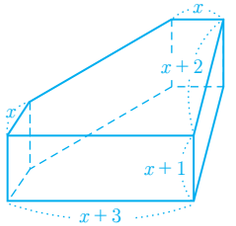
답 ⑤

219 2012학년도 09월 교육청 개념 07

오른쪽 그림은 오각기둥의 전개도이다. 이 전개도의 점선을 따라 접어서 만든 오각기둥의 부피가 108일 때, 전개도에서 x의 값을 구하시오.



오른쪽 그림과 같이 전개도의 점선을 따라 접어 오각기둥을 만들었을 때, 밑면의 넓이는 가로의 길이가 $x+3$이고 세로의 길이가 x인 직사각형의 넓이와 아랫변이 $x+3$이고 윗변이 x이며 높이가 2인 사다리꼴의 넓이의 합이다. 또한 오각기둥의 높이는 $x+1$이고 오각기둥의 부피가 108이므로



$$\left[x(x+3)+\frac{2\{(x+3)+x\}}{2}\right](x+1)=108$$

에서 식을 정리하면 $x^3+6x^2+8x-105=0$이다.
$f(x)=x^3+6x^2+8x-105$라 할 때, $f(3)=0$이므로 $f(x)$는 $x-3$을 인수로 가진다. 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

3	1	6	8	−105
		3	27	105
	1	9	35	0

에서 $f(x)=(x-3)(x^2+9x+35)$이다. 이때 이차방정식 $x^2+9x+35=0$의 판별식을 D라 하면 $D=9^2-4\cdot35=-59<0$이므로 $x^2+9x+35=0$은 실근을 가지지 않는다. 따라서 구하는 x의 값은 3이다.

답 3

개념 치료

개념

01. 고차방정식의 풀이

220 중요

삼차방정식 $x^3-2x^2-3x+6=0$의 세 실근을 α, β, γ라 할 때, $(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)$의 값은? (단, $\alpha<\beta<\gamma$)

① -2 ② -1 ③ 0

④ 1 ⑤ 2

방정식의 좌변을 인수분해하면

$$x^3-2x^2-3x+6=x^2(x-2)-3(x-2)=(x^2-3)(x-2)=0$$

이므로 세 근은 $x=\pm\sqrt{3}$ 또는 $x=2$이다. 따라서 $\alpha=-\sqrt{3}$, $\beta=\sqrt{3}$, $\gamma=2$이고

$$(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)=(-\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1)(2-1)=-2$$

답 ①

221 상위 1%

삼차방정식 $x^3-3x+1=0$의 한 근을 α라 하고 이차방정식 $x^2-\alpha x+1=0$의 한 근을 β라 하자. 이때, $\beta^3+\dfrac{1}{\beta^3}$의 값을 구하시오.

삼차방정식 $x^3-3x+1=0$의 한 근이 α이므로 $\alpha^3-3\alpha+1=0$이다. 또한 이차방정식 $x^2-\alpha x+1=0$의 한 근이 β이고 $\beta\neq0$이므로

$$\beta^2-\alpha\beta+1=0 \quad\Rightarrow\quad \beta+\frac{1}{\beta}=\alpha$$

이다. 곱셈 공식의 변형을 이용하면 구하는 값은

$$\beta^3+\frac{1}{\beta^3}=\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)^3-3\cdot\beta\cdot\frac{1}{\beta}\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)=\alpha^3-3\alpha=-1$$

답 -1

222

사차방정식 $(x-4)(x-3)(x+1)(x+2)-50=0$의 실수인 두 근을 α, β라 하고 허수인 두 근을 γ, δ라 할 때, $\alpha+\beta+\gamma\delta$의 값을 구하시오.

주어진 방정식의 좌변을 공통부분이 생기도록 전개하면

$$(x+2)(x-4)(x+1)(x-3)-50=(x^2-2x-8)(x^2-2x-3)-50=0$$

에서 $x^2-2x=X$로 치환하면

$$(X-8)(X-3)-50=X^2-11X-26=(X-13)(X+2)=0$$

이다. 따라서 $X=13$ 또는 $X=-2$이다.

(i) $X=13$일 때, $X=x^2-2x$를 대입하여 정리하면 $x^2-2x-13=0$이다. 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $\dfrac{D}{4}=14>0$이므로 서로 다른 두 실근을 가진다. 이때 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=2$이다.

(ii) $X=-2$일 때, $X=x^2-2x$를 대입하여 정리하면 $x^2-2x+2=0$이다. 이 이차방정식의 판별식을 D'이라 하면 $\dfrac{D'}{4}=-1<0$이므로 서로 다른 두 허근을 가진다. 이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\gamma\delta=2$이다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 값은 $\alpha+\beta+\gamma\delta=2+2=4$이다.

답 4

223

사차방정식 $x^4-4x^3+5x^2-4x+1=0$의 한 허근을 α라 할 때, $(\alpha^2+1)(\alpha-1)$의 값을 구하시오.

$x\neq0$이므로 주어진 방정식의 양변을 x^2으로 나누고 정리하면

$$x^2-4x+5-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+3=0$$

이다. 이때 $x+\dfrac{1}{x}=X$로 놓으면 $X^2-4X+3=(X-1)(X-3)=0$에서 $X=1$ 또는 $X=3$이다.

(i) $X=1$일 때, $x+\dfrac{1}{x}=1$의 양변에 x를 곱하면 $x^2-x+1=0$이고 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D=(-1)^2-4=-3<0$이므로 서로 다른 두 허근을 가진다.

(ii) $X=3$일 때, $x+\dfrac{1}{x}=3$의 양변에 x를 곱하면 $x^2-3x+1=0$이고 이 이차방정식의 판별식을 D'이라 하면 $D'=(-3)^2-4=5>0$이므로 서로 다른 두 실근을 가진다.

(i), (ii)에 의하여 α는 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 허근이고 $\alpha^2-\alpha+1=0$이므로 구하는 값은 $(\alpha^2+1)(\alpha-1)=\alpha(\alpha-1)=\alpha^2-\alpha=-1$이다.

답 -1

개념

02. 근의 조건이 주어진 삼차방정식

224 중요

x에 대한 삼차방정식 $x^3+(a-2)x^2+(6-2a)x-12=0$이 중근을 가질 때, 모든 실수 a의 값의 곱은?

① 180 ② 120 ③ 90

④ 48 ⑤ 24

$f(x)=x^3+(a-2)x^2+(6-2a)x-12$라 하면 $f(2)=0$이므로 삼차식 $f(x)$는 $x-2$를 인수로 가진다. 조립제법을 이용하여 삼차식 $f(x)$를 인수분해하면 $(x-2)(x^2+ax+6)=0$이고 방정식 $f(x)=0$이 중근을 가지는 경우는 다음과 같다.

(i) $x=2$가 x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+6=0$의 근일 경우, $2^2+2a+6=0$에서 $a=-5$이다.

(ii) x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+6=0$이 중근을 가질 경우 판별식 $D=a^2-24=0$에서 $a=\pm2\sqrt{6}$이다.

(i), (ii)에 의하여 모든 실수 a의 값의 곱은 $-5\cdot2\sqrt{6}\cdot(-2\sqrt{6})=120$이다.

답 ②

225

x에 대한 삼차방정식 $x^3-2x^2+(a-3)x+4-a=0$이 서로 다른 세 실근을 가질 때, 모든 자연수 a의 값의 합을 구하시오.

$f(x)=x^3-2x^2+(a-3)x+4-a$라 하면 $f(1)=0$이므로 삼차식 $f(x)$는 $x-1$을 인수로 가진다. 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

1	1	-2	$a-3$	$4-a$
		1	-1	$a-4$
	1	-1	$a-4$	0

에서 $f(x)=(x-1)(x^2-x+a-4)$이다. 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가질 때, 이차방정식 $x^2-x+a-4=0$은 1이 아닌 서로 다른 두 실근을 가진다.

(i) $x=1$을 이차방정식에 대입하면 $1^2-1+a-4\neq0$에서 $a\neq4$이다.

(ii) $x^2-x+a-4=0$의 판별식 $D=(-1)^2-4(a-4)>0$에서 $a<\dfrac{17}{4}$이다.

(i), (ii)에 의하여 a의 값의 범위는 $a<\dfrac{17}{4}$, $a\neq4$이므로 자연수 a는 1, 2, 3이고 이들의 합은 6이다.

답 6

226

x에 대한 삼차방정식 $x^3+(k+4)x^2-(k^2+4k)x-k^3=0$이 단 하나의 실근을 가지도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오. (단, 중근은 한 개의 근으로 한다.)

$f(x)=x^3+(k+4)x^2-(k^2+4k)x-k^3$이라 하면 $f(k)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면 $f(x)=(x-k)\{x^2+2(k+2)x+k^2\}$이다. x에 대한 이차방정식 $x^2+2(k+2)x+k^2=0$의 판별식을 D라 하면

(i) 이차방정식 $x^2+2(k+2)x+k^2=0$이 중근을 가지는 경우, $D=4k+4=0$에서 $k=-1$이다. 이때, $f(x)=(x+1)^3$이므로 $x=-1$은 삼차방정식 $f(x)=0$의 삼중근이다. 따라서 $k=-1$일 때, 삼차방정식 $f(x)=0$은 단 하나의 실근 $x=-1$을 가진다.

(ii) 이차방정식 $x^2+2(k+2)x+k^2=0$이 허근을 가지는 경우,

$$D=4k+4<0 \quad \Rightarrow \quad k<-1$$

이다. 이때, 삼차방정식 $f(x)=0$은 단 하나의 실근 $x=k$를 가진다.

(i), (ii)에서 구하는 k의 값의 범위는 $k\le -1$이다.

답 $k\le -1$

227 상위1%

x에 대한 삼차방정식 $x^3-4x^2+(k+3)x-k=0$의 세 실근이 각각 어떤 직각삼각형의 세 변의 길이일 때, 그 직각삼각형의 넓이를 S라 하자. 이때, $9S$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.)

$f(x)=x^3-4x^2+(k+3)x-k$라 하면 $f(x)=(x-1)(x^2-3x+k)$이다. 따라서 주어진 삼차방정식의 근은 $x=1$ 또는 x에 대한 이차방정식 $x^2-3x+k=0$의 근이다. 이차방정식 $x^2-3x+k=0$의 두 실근을 α, β $(\alpha\ge\beta)$라 하면 직각삼각형의 세 변의 길이는 각각 1, α, β이고, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=k$이다.

(i) 1이 빗변의 길이인 경우, $\alpha^2+\beta^2=1$이므로

$$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=9-2k=1 \quad \Rightarrow \quad k=4$$

이때 이차방정식 $x^2-3x+4=0$의 판별식을 D라 하면 $D<0$이므로 조건을 만족하지 않는다.

(ii) α가 빗변의 길이인 경우, $\alpha^2=1+\beta^2$이다. $\alpha^2-\beta^2=1$이므로

$$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=1 \quad \Rightarrow \quad \alpha-\beta=\frac{1}{3}$$

두 식 $\alpha+\beta=3$, $\alpha-\beta=\frac{1}{3}$을 연립하여 풀면 $\alpha=\frac{5}{3}$, $\beta=\frac{4}{3}$이다.

따라서 삼각형의 넓이는 $S=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot 1=\frac{2}{3}$이므로 구하는 값은 $9S=6$이다.

답 6

개념

03. 삼차방정식과 근과 계수의 관계

228

x에 대한 삼차방정식 $x^3-2x^2+ax+6=0$의 세 근 중 두 근의 절댓값이 같고 부호가 서로 다를 때, 상수 a의 값을 구하시오.

삼차방정식 $x^3-2x^2+ax+6=0$의 세 근 중 두 근의 절댓값이 같고, 서로 다른 부호이므로 α, β, $-\beta$로 놓을 수 있다. 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta-\beta=2 \quad \Rightarrow \quad \alpha=2$$

이다. 즉, $x=2$가 삼차방정식 $x^3-2x^2+ax+6=0$의 근이므로 대입하면 $a=-3$이다.

답 -3

229

x에 대한 삼차방정식 $x^3+6x^2+ax+b=0$의 세 근의 비가 $1:2:3$일 때, 삼차방정식 $x^3+ax^2+2bx+7=0$의 세 근을 α, β, γ라 하자. $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.

삼차방정식 $x^3+6x^2+ax+b=0$의 세 근을 k, $2k$, $3k$ (단, $k\ne 0$)라 하자.
삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$k+2k+3k=-6 \quad \Rightarrow \quad k=-1$$

$$k\cdot 2k+2k\cdot 3k+3k\cdot k=a \quad \Rightarrow \quad a=11k^2=11$$

$$k\cdot 2k\cdot 3k=-b \quad \Rightarrow \quad b=-6k^3=6$$

이므로 $x^3+ax^2+2bx+7=x^3+11x^2+12x+7=0$이다. 따라서

$$\alpha+\beta+\gamma=-11, \quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=12, \quad \alpha\beta\gamma=-7$$

이고 구하는 값은 다음과 같다.

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{12}{-7}=-\frac{12}{7}$$

답 $-\frac{12}{7}$

230 중요

삼차방정식 $3x^3+6x^2+3x-7=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=-2, \quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1, \quad \alpha\beta\gamma=\frac{7}{3}$$

이므로 구하는 식을 전개하고 곱셈 공식의 변형을 이용하면

$$\begin{aligned}&(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\\&=2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)\\&=2\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}=2\{(-2)^2-3\cdot 1\}=2\end{aligned}$$

답 ⑤

231

두 다항식 $f(x)=x^3-8$, $g(x)=x^3-x-3$에 대하여 삼차방정식 $f(x)=0$의 세 근이 α, β, γ일 때, $g(\alpha)g(\beta)g(\gamma)$의 값을 구하시오.

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=0, \quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\beta=0, \quad \alpha\beta\gamma=8$$

또한 α가 방정식 $x^3-8=0$의 근이므로 $\alpha^3-8=0$이고,

$$g(\alpha)=\alpha^3-\alpha-3=5-\alpha$$

이다. 같은 방법으로

$$g(\beta)=5-\beta, \quad g(\gamma)=5-\gamma$$

이므로 구하는 값은

$$\begin{aligned}g(\alpha)g(\beta)g(\gamma)&=(5-\alpha)(5-\beta)(5-\gamma)\\&=125-25(\alpha+\beta+\gamma)+5(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\beta)-\alpha\beta\gamma\\&=125-8=117\end{aligned}$$

답 117

232

x에 대한 삼차방정식 $x^3-kx^2-x-8=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=10$이다. 실수 k의 값을 구하시오.

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=k,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1,\quad \alpha\beta\gamma=8$$

이고 삼차 인수분해에 의하여

$$\begin{aligned}&\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma\\&=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)\\&=(\alpha+\beta+\gamma)\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}=k(k^2+3)\end{aligned}$$

에서 $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=10$이므로 $10-3\cdot8=k(k^2+3)$, 즉 $k^3+3k+14=0$이다. 이때 $f(k)=k^3+3k+14$라 하면 $f(-2)=0$이므로 조립제법을 이용하면

$$k^3+3k+14=(k+2)(k^2-2k+7)=0$$

에서 삼차방정식 $k^3+3k+14=0$의 해는 $k=-2$ 또는 $k=1\pm\sqrt{6}i$이다. 따라서 구하는 실수 k의 값은 -2이다.

답 -2

개념

04. 세 수를 근으로 하는 삼차방정식

233 중요

삼차방정식 $x^3-2x^2+3x+4=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식을 구하시오.

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=2,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3\quad \alpha\beta\gamma=-4$$

이므로 $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$를 세 근으로 하는 삼차방정식에서

$$(\text{세 근의 합})=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$$

$$\begin{aligned}(\text{두 근의 곱의 합})&=\alpha\beta\cdot\beta\gamma+\beta\gamma\cdot\gamma\alpha+\gamma\alpha\cdot\alpha\beta\\&=\alpha\beta^2\gamma+\beta\gamma^2\alpha+\gamma\alpha^2\beta=\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)\\&=(-4)\cdot2=-8\end{aligned}$$

$$(\text{세 근의 곱})=\alpha^2\beta^2\gamma^2=(-4)^2=16$$

이다. 따라서 구하는 삼차방정식은 $x^3-3x^2-8x-16=0$이다.

답 $x^3-3x^2-8x-16=0$

234

삼차방정식 $x^3+6x^2+14x+2=0$이 $\alpha-1$, $\beta-1$, $\gamma-1$을 세 근으로 가질 때, x에 대한 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$은 α, β, γ를 세 근으로 가진다. 이때, $a+b+c$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.)

삼차방정식 $x^3+6x^2+14x+2=0$의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\text{세 근의 합})=(\alpha-1)+(\beta-1)+(\gamma-1)=-6\ \Rightarrow\ \alpha+\beta+\gamma=-3$$

$$\begin{aligned}(\text{두 근의 곱의 합})&=(\alpha-1)(\beta-1)+(\beta-1)(\gamma-1)+(\gamma-1)(\alpha-1)\\&=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha-2(\alpha+\beta+\gamma)+3=14\ \Rightarrow\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{세 근의 곱})&=(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)\\&=\alpha\beta\gamma-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)-1=-2\ \Rightarrow\ \alpha\beta\gamma=7\end{aligned}$$

이다. 따라서 α, β, γ를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$$x^3+ax^2+bx+c=x^3+3x^2+5x-7=0$$

이므로 $a=3$, $b=5$, $c=-7$에서 $a+b+c=3+5-7=1$이다.

답 1

235

최고차항의 계수가 -1인 삼차식 $f(x)$에 대하여

$$f(\alpha)=f(\beta)=f(\gamma)=4$$

이고 삼차방정식 $f(x)=0$의 세 근의 곱이 20일 때, $\alpha\beta\gamma$의 값을 구하시오. (단, α, β, γ는 서로 다른 수이다.)

삼차방정식 $f(x)-4=0$의 세 실근이 α, β, γ이고 삼차식 $f(x)$의 최고차항의 계수가 -1이므로

$$f(x)-4=-(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

이다. 우변을 전개하여 정리하면

$$f(x)=-x^3+(\alpha+\beta+\gamma)x^2-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x+\alpha\beta\gamma+4$$

이므로 삼차방정식 $f(x)=0$의 세 근의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha\beta\gamma+4=20\ \Rightarrow\ \alpha\beta\gamma=16$$

답 16

개념

05. 삼차방정식의 켤레근

236

x에 대한 삼차방정식 $x^3+(a+1)x^2+bx+a-13=0$의 한 근이 $1-4i$일 때, 나머지 두 근의 합은? (단, a, b는 실수이다.)

① $2+4i$ ② $1+4i$ ③ $4i$
④ $-1+4i$ ⑤ $-2+4i$

주어진 삼차방정식의 계수가 모두 실수이고 한 근이 $1-4i$이므로 $1+4i$도 근이다. 나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\text{세 근의 합})=(1-4i)+(1+4i)+\alpha=-(a+1)\ \Rightarrow\ \alpha=-a-3$$

$$(\text{세 근의 곱})=\alpha(1-4i)(1+4i)=-a+13\ \Rightarrow\ 17\alpha=-a+13$$

이므로 두 식을 연립하여 풀면 $\alpha=1$이다. 따라서 $1-4i$가 아닌 나머지 두 근의 합은 $1+(1+4i)=2+4i$이다.

답 ①

237

x에 대한 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 두 근이 1, $\dfrac{10}{1-2i}$일 때, 실수 a, b, c에 대하여 $a+b-c$의 값을 구하시오.

a, b, c가 모두 실수이고 한 근이 $\dfrac{10}{1-2i}=\dfrac{10+20i}{5}=2+4i$이므로 $2-4i$도 근이다.

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\text{세 근의 합})=1+(2+4i)+(2-4i)=-a$$

$$(\text{두 근의 곱의 합})=1\cdot(2+4i)+(2+4i)(2-4i)+(2-4i)\cdot1=b$$

$$(\text{세 근의 곱})=1\cdot(2+4i)(2-4i)=-c$$

에서 $a=-5$, $b=24$, $c=-20$이다. 따라서 $a+b-c=-5+24-(-20)=39$이다.

답 39

238 상위1%

계수가 모두 실수이고 최고차항의 계수가 1인 삼차식

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$$

에 대하여 삼차방정식 $f(x)=0$의 한 근은 $2-3i$이고 삼차방정식 $f(3x-1)=0$의 세 근의 합이 4이다. a^2+b+c의 값을 구하시오.

방정식 $f(x)=0$의 세 근을 $2-3i$, $2+3i$, α라 하면 $f(3x-1)=0$에서 $3x-1=2-3i$ 또는 $3x-1=2+3i$ 또는 $3x-1=\alpha$가 된다. 즉, 방정식 $f(3x-1)=0$의 세 근은 $1-i$, $1+i$, $\frac{\alpha+1}{3}$이다. 방정식 $f(3x-1)=0$의 세근의 합이 4이므로

$$(1-i)+(1+i)+\frac{\alpha+1}{3}=4 \quad \Rightarrow \quad \alpha=5$$

이다. 삼차방정식 $f(x)=0$의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\text{세 근의 합})=(2-3i)+(2+3i)+5=-a \quad \Rightarrow \quad a=-9$$

$$(\text{두 근의 곱의 합})=(2-3i)(2+3i)+(2+3i)\cdot5+5\cdot(2-3i)=b \quad \Rightarrow \quad b=33$$

$$(\text{세 근의 곱})=(2-3i)(2+3i)\cdot5=-c \quad \Rightarrow \quad c=-65$$

이므로 구하는 값은 $a^2+b+c=81+33-65=49$이다.

답 49

개념

06. 방정식 $x^3=1$, $x^3=-1$의 허근의 성질

239 중요

삼차방정식 $x^3-1=0$의 한 허근을 ω라 할 때, **[보기]**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

[보기]

ㄱ. $\overline{\omega}+\frac{1}{\overline{\omega}}=-1$

ㄴ. $(\omega-1)(\overline{\omega}-1)=-1$

ㄷ. $\omega^{10}+\overline{\omega}+1=0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$x^3-1=0$에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근은 ω이고 다른 허근은 $\overline{\omega}$이다. 이때 $\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$이므로

ㄱ. (참) $\overline{\omega}$는 $x^2+x+1=0$의 한 근이므로 $\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$이다. 따라서

$$\overline{\omega}+\frac{1}{\overline{\omega}}=\frac{\overline{\omega}^2+1}{\overline{\omega}}=\frac{-\overline{\omega}}{\overline{\omega}}=-1$$

ㄴ. (거짓) $(\omega-1)(\overline{\omega}-1)=\omega\overline{\omega}-(\omega+\overline{\omega})+1=1-(-1)+1=3$

ㄷ. (참) $\omega^{10}+\overline{\omega}+1=(\omega^3)^3\cdot\omega+\overline{\omega}+1=\omega+\overline{\omega}+1=-1+1=0$

240

답 ④

방정식 $x+\frac{1}{x}=1$의 한 허근을 ω라 할 때, $\frac{\overline{\omega}+1}{1-\omega^2}+\frac{\omega}{1+\omega^2}$의 값을 구하시오. (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

$x+\frac{1}{x}=1$의 양변에 x를 곱하면 $x^2+1=x$이므로 ω는 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 한 허근이다. 즉, $\omega^2-\omega+1=0$이다. 또한 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 모든 계수가 실수이므로 $\overline{\omega}$는 다른 한 근이고 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\omega+\overline{\omega}=1$, $\omega\overline{\omega}=1$이다. 따라서 구하는 값은

$$\frac{\overline{\omega}+1}{1-\omega^2}+\frac{\omega}{1+\omega^2}=\frac{(1-\omega)+1}{1-(\omega-1)}+\frac{\omega}{1+(\omega-1)}=\frac{2-\omega}{2-\omega}+\frac{\omega}{\omega}=2$$

답 2

241

사차방정식 $x^4-2x^3-x+2=0$의 한 허근을 ω라 할 때,

$$(\omega+1)(\omega^2+1)(\omega^3+1)(\omega^4+1)(\omega^5+1)$$

의 값을 구하시오.

$x^4-2x^3-x+2=0$의 좌변을 인수분해하면

$$x^4-2x^3-x+2=x^3(x-2)-(x-2)$$

$$=(x-2)(x^3-1)$$

$$=(x-2)(x-1)(x^2+x+1)=0$$

이므로 ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이다. 따라서 $\omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$이고 주어진 식은

$$(\omega+1)(\omega^2+1)(\omega^3+1)(\omega^4+1)(\omega^5+1)$$

$$=(-\omega^2)(-\omega)(1+1)(1\cdot\omega+1)(1\cdot\omega^2+1)$$

$$=2\omega^3(-\omega^2)(-\omega)=2$$

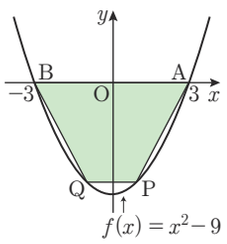
답 2

개념

07. 고차방정식의 활용

242

오른쪽 그림과 같이 이차함수 $f(x)=x^2-9$의 그래프 위에 두 점 $P(t, f(t))$, $Q(-t, f(-t))$가 있다. 두 점 $A(3, 0)$, $B(-3, 0)$에 대하여 사각형 APQB의 넓이가 25일 때, t의 값을 구하시오. (단, $0<t<3$)



$f(t)=f(-t)$이므로 사각형 APQB는 사다리꼴이다. 두 밑변의 길이가 각각 $\overline{AB}=6$, $\overline{PQ}=2t$이고 높이가 $-f(t)=-(t^2-9)=-t^2+9$이므로 사다리꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2}(2t+6)(-t^2+9)=-(t+3)(t^2-9)$$

이다. 사다리꼴의 넓이가 25이므로 $-(t+3)(t^2-9)=25$에서 $t^3+3t^2-9t-2=0$이다. 따라서 삼차방정식 $t^3+3t^2-9t-2=(t-2)(t^2+5t+1)=0$의 해는 $t=2$ 또는 $t=\frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$이고 $0<t<3$이므로 $t=2$이다.

답 2

243

모서리의 길이가 각각 x, $x+2$, $x+4$인 세 정육면체가 있다. 세 정육면체의 부피의 합과 부피가 같은 새로운 정육면체를 만들 때, 이 정육면체의 한 모서리의 길이는 $x+6$이다. x의 값을 구하시오.

문제의 조건에서 세 정육면체의 모서리의 길이가 각각 x, $x+2$, $x+4$이고 세 정육면체의 부피의 합과 부피가 같은 새로운 정육면체의 한 모서리의 길이가 $x+6$이므로

$$x^3+(x+2)^3+(x+4)^3=(x+6)^3 \quad \Rightarrow \quad 2x^3-48x-144=0$$

이다. $f(x)=x^3-24x-72$이라 할 때, $f(6)=0$이므로 조립제법을 이용하면

6	1	0	−24	−72
		6	36	72
	1	6	12	0

에서 $f(x)=(x-6)(x^2+6x+12)$이다. 이차방정식 $x^2+6x+12=0$의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=-3<0$이므로 방정식 $f(x)=0$을 만족시키는 실수 x의 값은 6이다.

답 6

244

x에 대한 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx-3=0$이 한 개의 실근 α와 두 개의 허근 β, β^2을 가질 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 실수이다.)

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx-3=0$의 계수가 모두 실수이므로, 삼차방정식의 한 허근이 β이면 $\overline{\beta}$도 근이다. 즉, $\beta^2=\overline{\beta}$이다. $\beta=p+qi$ (단, p, q는 실수이고 $q\neq0$)라 하면, $\beta^2=p^2-q^2+2pqi$이므로

$$p^2-q^2+2pqi=p-qi \quad \Rightarrow \quad p^2-q^2=p,\ 2pq=-q$$

에서 $p=-\frac{1}{2}$, $q=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$이다. 이때 $\beta=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$라 하면 $\beta^2=\overline{\beta}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$이므로, $\beta\beta^2=1$이고 주어진 삼차방정식의 세 근은

$$\alpha, \quad \beta=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \beta^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

이다. 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\text{세 근의 곱})=\alpha\beta\beta^2=3 \quad \Rightarrow \quad \alpha=3$$

$$(\text{세 근의 합})=\alpha+\beta+\beta^2=-a \quad \Rightarrow \quad a=-2$$

$$(\text{두 근의 곱의 합})=\alpha\beta+\beta\beta^2+\beta^2\alpha=b \quad \Rightarrow \quad b=-2$$

이다. 따라서 구하는 값은 $ab=(-2)\cdot(-2)=4$이다.

245 마타

답 4

x에 대한 삼차방정식 $x^3+kx+6=0$의 세 실근을 α, β, γ라 하자. $|\alpha|+|\beta|+|\gamma|=6$일 때, 상수 k의 값을 구하시오.

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=0 \quad \cdots ㉠$$

$$\alpha\beta\gamma=-6 \quad \cdots ㉡$$

이다. 즉 α, β, γ가 모두 0이 아니고 이 중 두 수는 양수이다. α, β가 양수, γ가 음수라 하면

$$|\alpha|+|\beta|+|\gamma|=\alpha+\beta-\gamma=6 \quad \Rightarrow \quad \alpha+\beta=6+\gamma \quad \cdots ㉢$$

이다. ㉢을 ㉠에 대입하면 $6+2\gamma=0$에서 $\gamma=-3$이고 이를 ㉠, ㉡에 각각 대입하면 $\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=2$이다. 따라서 구하는 상수 k의 값은

$$k=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\alpha\beta+\gamma(\alpha+\beta)=2+(-3)\cdot3=-7$$

답 -7

246

x에 대한 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 세 근 α, β, γ가

$$\alpha\beta\gamma=(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)=(\alpha-2)(\beta-2)(\gamma-2)$$

를 만족시킬 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.)

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라 하면 삼차방정식 $f(x)=0$의 세 근이 α, β, γ이므로

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \quad \cdots ㉠$$

이다. ㉠에 $x=0$, $x=-1$, $x=2$를 각각 대입하면

$$f(0)=(-\alpha)\cdot(-\beta)\cdot(-\gamma)=-\alpha\beta\gamma$$

$$f(-1)=(-1-\alpha)(-1-\beta)(-1-\gamma)=-(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$$

$$f(2)=(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)=-(\alpha-2)(\beta-2)(\gamma-2)$$

이다. 이때 주어진 식에 의하여 $f(0)=f(-1)=f(2)$이고 그 값을 k (단, k는 상수)라 하면 0, -1, 2는 삼차방정식 $f(x)-k=0$의 세 근이다. 즉,

$$f(x)-k=x(x+1)(x-2) \quad \Rightarrow \quad f(x)=x^3-x^2-2x+k$$

이다. 따라서 $a=-1$, $b=-2$이고 구하는 값은 $a+b=-3$이다.

답 -3

247 마타

사차방정식 $x^4-8x^3+20x^2-32x+16=0$의 한 허근을 ω라 할 때, ω^9의 값은?

① -512 ② -256 ③ -128
④ 256 ⑤ 512

0은 주어진 사차방정식의 근이 아니므로 x^2으로 나누어 정리하면

$$x^2-8x+20-\frac{32}{x}+\frac{16}{x^2}=\left(x+\frac{4}{x}\right)^2-8\left(x+\frac{4}{x}\right)+12=0$$

이다. $x+\frac{4}{x}=X$로 놓으면

$$\left(x+\frac{4}{x}\right)^2-8\left(x+\frac{4}{x}\right)+12=X^2-8X+12=(X-2)(X-6)=0$$

이므로 $X=2$ 또는 $X=6$이다.

(i) $X=2$일 때, $x+\frac{4}{x}=2$의 양변에 x를 곱하여 정리하면 $x^2-2x+4=0$이고 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, $\frac{D}{4}=(-1)^2-4=-3<0$이므로 이차방정식 $x^2-2x+4=0$은 서로 다른 두 허근을 가진다.

(ii) $X=6$일 때, $x+\frac{4}{x}=6$의 양변에 x를 곱하여 정리하면 $x^2-6x+4=0$이고 이 이차방정식의 판별식을 D'이라 할 때, $\frac{D'}{4}=(-3)^2-4=5>0$이므로 이차방정식 $x^2-6x+4=0$은 서로 다른 두 실근을 가진다.

(i), (ii)에 의하여 ω는 이차방정식 $x^2-2x+4=0$의 한 허근이다. 즉, $\omega^2-2\omega+4=0$이고 이 식의 양변에 $\omega+2$를 곱하면 $\omega^3+8=0$에서 $\omega^3=-8$이다. 따라서 구하는 값은 $\omega^9=(\omega^3)^3=(-8)^3=-512$이다.

답 ①

248 마타

x에 대한 삼차방정식

$$x^3-(a+1)x^2+(a+b)x-b=0$$

의 세 근을 x_1, x_2, x_3이라 하자. 다음 조건을 만족시키는 실수 a, b의 순서쌍 (a, b)를 모두 구하시오.

(가) x_1, x_2, x_3은 모두 실수이다.
(나) $i=1, 2, 3$, $j=1, 2, 3$일 때, $x_i\neq x_j$이면 $|x_i-x_j|=2$이다.

삼차식 $f(x)$를 $f(x)=x^3-(a+1)x^2+(a+b)x-b$라 할 때, $f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하면 $f(x)=(x-1)(x^2-ax+b)$이다. $g(x)=x^2-ax+b$라 할 때, 다음과 같은 경우에 문제의 조건을 만족시킨다.

(i) 이차방정식 $g(x)=0$이 -1을 중근으로 가지는 경우
$g(x)=(x+1)^2=x^2+2x+1=x^2-ax+b$에서 $(a, b)=(-2, 1)$이다.

(ii) 이차방정식 $g(x)=0$이 1을 중근으로 가지는 경우
$g(x)=(x-1)^2=x^2-2x+1=x^2-ax+b$에서 $(a, b)=(2, 1)$이다.

(iii) 이차방정식 $g(x)=0$이 3을 중근으로 가지는 경우
$g(x)=(x-3)^2=x^2-6x+9=x^2-ax+b$에서 $(a, b)=(6, 9)$이다.

(iv) 이차방정식 $g(x)=0$이 -1과 1을 근으로 가지는 경우
$g(x)=(x+1)(x-1)=x^2-1=x^2-ax+b$에서 $(a, b)=(0, -1)$이다.

(v) 이차방정식 $g(x)=0$이 1과 3을 근으로 가지는 경우
$g(x)=(x-1)(x-3)=x^2-4x+3=x^2-ax+b$에서 $(a, b)=(4, 3)$이다.

(i)~(v)에서 실수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$$(a, b)=(-2, 1), (2, 1), (6, 9), (0, -1), (4, 3)$$

답 $(a, b)=(-2, 1), (2, 1), (6, 9), (0, -1), (4, 3)$

서 술 형

• 풀이 과정에 점수가 부여되니 풀이 과정 및 정답을 상세하게 서술하세요.

249

방정식 $x^3+x^2+6|x|-8=0$의 모든 실근의 합을 구하시오.

$x<0$일 때, $|x|=-x$이고 $x\geq 0$일 때, $|x|=x$이다. [10%]

(i) $x<0$일 때, 주어진 방정식은 $x^3+x^2-6x-8=0$이다. $f(x)=x^3+x^2-6x-8$이라 할 때, $f(-2)=0$이므로 조립제법을 이용하면

-2	1	1	-6	-8
		-2	2	8
	1	-1	-4	0

에서 $f(x)=(x+2)(x^2-x-4)$이다. 따라서 삼차방정식 $f(x)=0$의 실근은 $x=-2$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{2}$이고 $x<0$이므로 $x=-2$ 또는 $x=\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}$이 주어진 방정식의 근이다. [40%]

(ii) $x\geq 0$일 때, 주어진 방정식은 $x^3+x^2+6x-8=0$이다. $g(x)=x^3+x^2+6x-8$이라 할 때, $g(1)=0$이므로 조립제법을 이용하면

1	1	1	6	-8
		1	2	8
	1	2	8	0

에서 $g(x)=(x-1)(x^2+2x+8)$이고 이차방정식 $x^2+2x+8=0$의 판별식 D가 $\dfrac{D}{4}=1^2-8=-7<0$이므로 이차방정식은 두 허근을 가진다. 따라서 $x\geq 0$일 때, 삼차방정식 $g(x)=0$의 실근은 $x=1$이다. [40%]

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 모든 실근의 합은 $-2+\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}+1=\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}$이다. [10%]

답 $\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}$

250

x에 대한 사차방정식

$$x^4-(a+3)x^3+(5a-1)x^2-(8a-9)x+4a-6=0$$

이 중근을 가질 때, 모든 실수 a의 값의 합을 구하시오.

사차식 $f(x)$를

$$f(x)=x^4-(a+3)x^3+(5a-1)x^2-(8a-9)x+4a-6$$

이라 할 때, $f(1)=0$, $f(2)=0$이므로 $f(x)$는 $x-1$과 $x-2$를 모두 인수로 가진다. 조립제법을 이용하면

1	1	$-a-3$	$5a-1$	$-8a+9$	$4a-6$
		1	$-a-2$	$4a-3$	$-4a+6$
2	1	$-a-2$	$4a-3$	$-4a+6$	0
		2	$-2a$	$4a-6$	
	1	$-a$	$2a-3$	0	

에서 $f(x)=(x-1)(x-2)(x^2-ax+2a-3)$이다. [30%]

$g(x)=x^2-ax+2a-3$일 때, 다음과 같은 경우에 사차방정식 $f(x)=0$이 중근을 가진다.

(i) 이차방정식 $g(x)=0$이 1을 근으로 가지는 경우 $g(1)=1-a+2a-3=0$에서 $a=2$이다. [20%]

(ii) 이차방정식 $g(x)=0$이 2를 근으로 가지는 경우 $g(2)=4-2a+2a-3=1\neq 0$이므로 a의 값이 존재하지 않는다. [20%]

(iii) 이차방정식 $g(x)=0$이 중근을 가지는 경우 이차방정식의 판별식 D에 대하여

$$D=(-a)^2-8a+12=(a-2)(a-6)=0$$

에서 $a=2$ 또는 $a=6$이다. [20%]

(i), (ii), (iii)에 의하여 모든 실수 a의 값의 합은 $2+6=8$이다. [10%]

답 8

251 단계형

삼차식 $P(x)=x^3-2x^2+x+5$에 대하여 방정식 $P(x)=0$의 세 근을 α, β, γ라 하자.

(1) $(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)$의 값을 구하시오.

(2) 삼차식 $P(x)$를 이차식 x^2-x+1로 나누었을 때의 몫 $Q(x)$와 나머지 $R(x)$를 각각 구하시오.

(3) $(\alpha^2-\alpha+1)(\beta^2-\beta+1)(\gamma^2-\gamma+1)$의 값을 구하시오.

(1) $P(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$에서

$$P(1)=(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=5$$

이므로 구하는 값은

$$(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)=-P(1)=-5 \quad \cdots ㉠$$

이다.

(2) 다항식의 나눗셈을 이용하여 삼차식 $P(x)$를 이차식 x^2-x+1로 나누면

$$\begin{array}{r} x-1 \\ x^2-x+1\overline{)\,x^3-2x^2+x+5} \\ x^3-\ x^2+x \\ \hline -\ x^2+\ \ 5 \\ -\ x^2+x-1 \\ \hline -x+6 \end{array}$$

이므로 $Q(x)=x-1$, $R(x)=-x+6$이다.

(3) α가 방정식 $P(\alpha)=0$의 근이므로 $P(\alpha)=(\alpha^2-\alpha+1)(\alpha-1)-\alpha+6=0$이고 ㉠에서 $\alpha\neq 1$이므로

$$\alpha^2-\alpha+1=\frac{\alpha-6}{\alpha-1}$$

이다. 마찬가지로

$$\beta^2-\beta+1=\frac{\beta-6}{\beta-1},\quad \gamma^2-\gamma+1=\frac{\gamma-6}{\gamma-1}$$

이다. 따라서

$$(\alpha^2-\alpha+1)(\beta^2-\beta+1)(\gamma^2-\gamma+1)=\left(\frac{\alpha-6}{\alpha-1}\right)\left(\frac{\beta-6}{\beta-1}\right)\left(\frac{\gamma-6}{\gamma-1}\right)$$
$$=\frac{(\alpha-6)(\beta-6)(\gamma-6)}{(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)}$$

이다. 이때, ㉠과

$$P(6)=(6-\alpha)(6-\beta)(6-\gamma)=155 \quad \Rightarrow \quad (\alpha-6)(\beta-6)(\gamma-6)=-155$$

에 의하여 구하는 값은 $\dfrac{(\alpha-6)(\beta-6)(\gamma-6)}{(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)}=\dfrac{-155}{-5}=31$이다.

답 (1) -5 (2) $Q(x)=x-1$, $R(x)=-x+6$ (3) 31

08 연립방정식

01 연립일차방정식

1. 미지수가 2개인 연립일차방정식의 풀이

두 개의 미지수 중 한 개를 소거하여 미지수의 값을 구한 뒤 하나의 식에 대입하여 다른 미지수의 값을 구한다.

2. 미지수가 3개인 연립일차방정식의 풀이

하나의 미지수를 소거한 뒤 식이나 값을 대입하여 미지수가 2개인 연립일차방정식을 푼다.

02 연립이차방정식

1. 일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식의 풀이

일차방정식을 어느 한 문자에 대하여 정리한 후 이차방정식에 대입하여 푼다.

2. 두 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식의 풀이

(1) 이차식을 인수분해할 수 있는 경우

일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식으로 바꾸어 푼다.

(2) 이차식을 인수분해할 수 없는 경우

1) 이차항을 모두 소거할 수 있는 경우, 이차항을 소거하여 얻은 일차방정식을 주어진 이차방정식에 대입하여 푼다.

2) 이차항을 모두 소거할 수 없는 경우, 상수항을 소거한 후 얻은 이차식을 인수분해하여 얻은 두 일차방정식을 주어진 이차방정식에 각각 대입하여 푼다.

3. $x+y$, xy로 표현가능한 연립이차방정식의 풀이

(1) $x+y=u$, $xy=v$로 두고 연립방정식을 풀어서 u, v의 값을 구한다.

(2) 두 근이 x, y인 t에 대한 이차방정식 $t^2-ut+v=0$을 풀어서 x, y의 값을 구한다.

03 부정방정식과 공통근

1. 부정방정식: 미지수보다 방정식의 수가 적어서 **무수히 많은 해를 가지는 방정식**

2. 부정방정식의 풀이

(1) 해의 범위가 정수일 때: (다항식 A)$\times$(다항식 B)=(정수)의 꼴로 변형한다.

(2) 해의 범위가 실수일 때

1) 실수 A, B에 대하여 $A^2+B^2=0$이면 $A=0$, $B=0$임을 이용하여 푼다.

2) 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 후 판별식 $D\geq 0$임을 이용하여 푼다.

3. 공통근

두 방정식 $f(x)=0$, $g(x)=0$의 공통근을 α라 하면 두 방정식 $f(\alpha)=0$, $g(\alpha)=0$을 연립하여 풀어서 α의 값을 구한다.

마·타·노·트

▶ **$x+y$, xy로 표현가능한 식**

두 문자 x, y로 이루어진 식 중에서 x, y의 자리를 바꾸어도 식이 변하지 않으면 그 식을 $x+y$, xy로 표현할 수 있다.

▶ **절댓값의 성질과 부정방정식**

실수 A, B에 대하여 $|A|+|B|=0$이면 $A=0$, $B=0$임을 이용하여 푼다.

252 2015학년도 03월 교육청

개념 05

x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} 2x-y=5 \\ x^2-2y=k \end{cases}$ 가 오직 한 쌍의 해 $x=\alpha$, $y=\beta$를 가질 때, $\alpha+\beta+k$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.)

주어진 연립방정식을 $\begin{cases} 2x-y=5 & \cdots ㉠ \\ x^2-2y=k & \cdots ㉡ \end{cases}$ 이라 하자. ㉠을 y에 대하여 정리하면 $y=2x-5$이고 ㉡에 대입하면

$$x^2-2(2x-5)=k \quad \Rightarrow \quad x^2-4x+10-k=0 \qquad \cdots ㉢$$

이다. 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 주어진 연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지므로

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-(10-k)=0 \quad \Rightarrow \quad k=6$$

이다. $k=6$을 ㉢에 대입하면 $x^2-4x+4=(x-2)^2=0$에서 $x=2$이므로 $y=-1$이다. 따라서 $\alpha=2$, $\beta=-1$이므로 구하는 값은 $\alpha+\beta+k=2+(-1)+6=7$이다.

답 7

253 2015학년도 09월 교육청

개념 07

세 실수 a, b, c에 대하여 한 근이 $1+\sqrt{3}i$인 x에 대한 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$과 x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+2=0$이 공통인 근 m을 가질 때, m의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 2 ② 1 ③ 0
④ -1 ⑤ -2

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 계수가 모두 실수이므로 복소수 $1+\sqrt{3}i$가 삼차방정식의 한 근이면 $1-\sqrt{3}i$도 삼차방정식의 근이다. 만약 $1+\sqrt{3}i$가 이차방정식 $x^2+ax+2=0$의 한 근이면 a가 실수이므로 $1-\sqrt{3}i$도 근이다. 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)=1-3i^2=4\neq 2$$

이므로 $1+\sqrt{3}i$와 $1-\sqrt{3}i$는 이차방정식 $x^2+ax+2=0$의 근이 아니다. 한편, $1+\sqrt{3}i$, $1-\sqrt{3}i$를 두 근으로 하고 최고차항의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2-2x+4=0$이고 삼차방정식이 공통인 근 m을 가지므로

$$x^3+ax^2+bx+c=(x^2-2x+4)(x-m)$$

과 같이 나타낼 수 있다. 위 식의 우변을 전개하면 이차항이 $-m-2$이므로

$$a=-m-2 \qquad \cdots ㉠$$

이다. 공통인 근 m에 대하여 $m^2+am+2=0$이므로 이 식에 ㉠을 대입하면

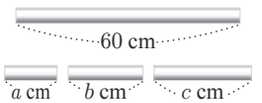
$$m^2+(-m-2)m+2=0 \quad \Rightarrow \quad -2m+2=0$$

이므로 $m=1$이다.

답 ②

254 2017학년도 06월 교육청

개념 01, 08



오른쪽 그림과 같이 길이가 60 cm인 철사를 길이가 a cm, b cm, c cm ($a<b<c$)인 세 조각으로 잘랐다. 이 조각들로 만든 세 변의 길이가 각각 a, b, c인 삼각형이 다음 조건을 만족시킬 때, $3a-b+c$의 값을 구하시오. (단, 철사의 두께는 고려하지 않고, 철사를 세 조각으로 자를 때 남는 조각은 없다.)

(가) 두 변의 길이의 차의 최댓값은 16이다.
(나) 두 변의 길이의 차의 최솟값은 2이다.

$a<b<c$이고 두 변의 길이의 차의 최댓값은 $c-a$이므로 조건 (가)에 의하여 $c-a=16$이다. 조건 (나)에 의하여 $b-a=2$ 또는 $c-b=2$이다.

(i) $b-a=2$인 경우, $c-a=16$이므로 두 식을 더하면 $-2a+b+c=18$ ㉠ 이고 철사의 총 길이가 60 cm이므로 $a+b+c=60$ ㉡ 이다. ㉡−㉠을 하면 $3a=42$에서 $a=14$, $b=16$, $c=30$이다. 그런데 $c=a+b$이므로 세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형은 존재하지 않는다.

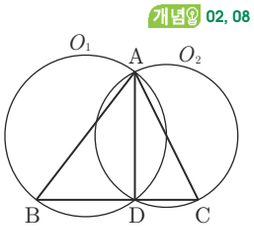
(ii) $c-b=2$인 경우, $c-a=16$이므로 두 식을 더하면 $-a-b+2c=18$ ㉢ 이고 철사의 총 길이가 60 cm이므로 $a+b+c=60$ ㉣ 이다. ㉢+㉣을 하면 $3c=78$에서 $a=10$, $b=24$, $c=26$이고 $a+b>c$이므로 세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형이 존재한다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 값은 $3a-b+c=3\cdot 10-24+26=32$이다.

답 32

255 2016학년도 06월 교육청

개념 02, 08



그림과 같이 삼각형 ABC의 변 AB와 변 AC를 각각 지름으로 하는 두 원 O_1, O_2가 두 점 A, D에서 만난다. $\overline{AD}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{AB}$가 이 순서대로 네 개의 연속된 짝수일 때, 두 원 O_1, O_2의 넓이의 합을 구하시오.

문제의 조건에서 자연수 n에 대하여

$$\overline{AD}=2n, \quad \overline{AC}=2n+2, \quad \overline{BC}=2n+4, \quad \overline{AB}=2n+6$$

이라 두자. $\overline{BD}=x$, $\overline{CD}=y$라 두면 $x+y=2n+4$ ㉠ 이고 두 삼각형 ABD와 ACD는 직각삼각형이므로

$$\overline{AD}^2=\overline{AB}^2-\overline{BD}^2, \quad \overline{AD}^2=\overline{AC}^2-\overline{CD}^2$$

에서

$$(2n+6)^2-x^2=(2n+2)^2-y^2 \qquad \cdots ㉡$$

이고 ㉡을 정리하고 ㉠을 대입하면

$$16(n+2)=(x-y)(x+y)=(x-y)(2n+4)$$

이므로 $x-y=8$ ㉢ 이다. ㉠과 ㉢을 연립하여 풀면 $x=n+6$, $y=n-2$이고 직각삼각형 ACD에서 피타고라스의 정리에 의하여 $(2n+2)^2=4n^2+(n-2)^2$이다. 이 식을 정리하면 $n^2-12n=0$에서 $n=12$이고 $\overline{AB}=30$, $\overline{AC}=26$이므로 두 원의 넓이의 합은 다음과 같다.

$$15^2\pi+13^2\pi=394\pi$$

답 394π

개념 치료

개념

01. 연립일차방정식

256

x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} |x+y|=x+3 \\ |x-y|=y+3 \end{cases}$ 을 푸시오.

$x+y$, $x-y$의 값의 부호에 따라 절댓값을 풀면 다음과 같다.

(i) $x+y\ge0$, $x-y\ge0$일 때, $\begin{cases} x+y=x+3 \\ x-y=y+3 \end{cases}$ 에서 $(x, y)=(9, 3)$이다.

(ii) $x+y<0$, $x-y\ge0$일 때, $\begin{cases} -x-y=x+3 \\ x-y=y+3 \end{cases}$ 에서 $(x, y)=\left(-\frac{3}{5}, -\frac{9}{5}\right)$이다.

(iii) $x+y\ge0$, $x-y<0$일 때, $\begin{cases} x+y=x+3 \\ -x+y=y+3 \end{cases}$ 에서 $(x, y)=(-3, 3)$이다.

(iv) $x+y<0$, $x-y<0$일 때, $\begin{cases} -x-y=x+3 \\ -x+y=y+3 \end{cases}$ 에서 $(x, y)=(-3, 3)$이다. 이때 $x+y=-3+3=0$이므로 해가 없다.

(i)~(iv)에 의하여 $(x, y)=(9, 3), \left(-\frac{3}{5}, -\frac{9}{5}\right), (-3, 3)$이다.

답 $(x, y)=(9, 3), \left(-\frac{3}{5}, -\frac{9}{5}\right), (-3, 3)$

257 중요

x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} ax+y=2 \\ (3a-2)x+ay=4 \end{cases}$ 가 해가 없을 때의 실수 a의 값을 a_N, 해가 무수히 많을 때의 실수 a의 값을 a_I라 할 때, a_N+2a_I의 값을 구하시오.

주어진 연립방정식을 $\begin{cases} ax+y=2 & \cdots ㉠ \\ (3a-2)x+ay=4 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 이라 하자. ㉠×a−㉡을 하여 y를 소거하면

$$(a^2-3a+2)x=2a-4 \quad \Rightarrow \quad (a-1)(a-2)x=2(a-2)$$

이다. a의 값에 따라 다음과 같이 방정식의 해를 정할 수 있다.

(i) $a=1$일 때, $0\cdot x=-2$이므로 해가 없다.

(ii) $a=2$일 때, $0\cdot x=0$이므로 해가 무수히 많다.

(iii) $a\ne1$이고 $a\ne2$일 때, $x=\frac{2}{a-1}$이고 $y=-\frac{2}{a-1}$이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 $a_N=1$이고 $a_I=2$이므로 구하는 값은 $a_N+2a_I=5$이다.

답 5

258 상위 1%

연립방정식 $\begin{cases} x-2y=-5xy \\ 3y+2z=-4yz \\ x+3z=7xz \end{cases}$ 를 푸시오. (단, $xyz\ne0$)

$xyz\ne0$이므로 각각의 방정식을 xy, yz, zx로 각각 나누면

$$\frac{1}{y}-\frac{2}{x}=-5, \quad \frac{3}{z}+\frac{2}{y}=-4, \quad \frac{1}{z}+\frac{3}{x}=7$$

이다. $\frac{1}{x}=X$, $\frac{1}{y}=Y$, $\frac{1}{z}=Z$로 놓으면 $\begin{cases} 2X-Y=5 & \cdots ㉠ \\ 2Y+3Z=-4 & \cdots ㉡ \\ 3X+Z=7 & \cdots ㉢ \end{cases}$ 이다. ㉠×2+㉡을 하여 Y를 소거하면 $4X+3Z=6$ … ㉣이고 ㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $X=3$, $Z=-2$이다. 그리고 $X=3$을 ㉠에 대입하면 $Y=1$이다. 따라서

$$(X, Y, Z)=(3, 1, -2) \quad \Rightarrow \quad (x, y, z)=\left(\frac{1}{3}, 1, -\frac{1}{2}\right)$$

답 $(x, y, z)=\left(\frac{1}{3}, 1, -\frac{1}{2}\right)$

259

x, y, z에 대한 연립방정식 $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 5x+y+2z=8 \\ ax-7y-z=6 \end{cases}$ 의 해가 존재하지 않을 때, 상수 a의 값을 구하시오.

주어진 연립방정식을 $\begin{cases} x+2y+z=1 & \cdots ㉠ \\ 5x+y+2z=8 & \cdots ㉡ \\ ax-7y-z=6 & \cdots ㉢ \end{cases}$ 이라 하자. ㉠×2−㉡을 하여 z를 소거하면 $-3x+3y=-6$에서 $y=x-2$ … ㉣이고 ㉠+㉢을 하여 z를 소거하면 $(a+1)x-5y=7$ … ㉤이다. ㉣을 ㉤에 대입하여 정리하면

$$(a+1)x-5(x-2)=7 \quad \Rightarrow \quad (a-4)x=-3$$

이다. $a=4$일 때, $0\cdot x=-3$이므로 x가 존재하지 않는다. 따라서 $a=4$일 때, 주어진 연립방정식의 해가 존재하지 않는다.

답 4

개념

02. 일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립방정식

260 중요

연립방정식 $\begin{cases} 2x-y=5 \\ x^2-2xy-y^2=2 \end{cases}$ 를 만족시키는 $x=\alpha$, $y=\beta$에 대하여 $\alpha\beta<0$일 때, $2\alpha-\beta$의 값을 구하시오.

주어진 연립방정식을 $\begin{cases} 2x-y=5 & \cdots ㉠ \\ x^2-2xy-y^2=2 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 이라 하자. ㉠을 y에 대하여 정리하면 $y=2x-5$이고 이를 ㉡에 대입하면

$$x^2-2x(2x-5)-(2x-5)^2=2 \quad \Rightarrow \quad 7x^2-30x+27=0$$

에서 $(x-3)(7x-9)=0$이므로 $x=3$ 또는 $x=\frac{9}{7}$이다. 이를 각각 ㉠에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는 $(x, y)=(3, 1), \left(\frac{9}{7}, -\frac{17}{7}\right)$에서 $\alpha\beta<0$이므로 $\alpha=\frac{9}{7}$, $\beta=-\frac{17}{7}$이고 구하는 값은 $2\alpha-\beta=5$이다.

답 5

261

연립방정식 $\begin{cases} |x|-y=3 \\ x^2+y^2=29 \end{cases}$ 를 만족시키는 두 실수 x, y에 대하여 xy의 최댓값을 구하시오.

주어진 연립방정식을 $\begin{cases} |x|-y=3 & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=29 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 이라 하자. 절댓값 안의 식이 0이 되는 값을 기준으로 범위를 나누어 풀면 다음과 같다.

(i) $x<0$일 때, $|x|=-x$이고 ㉠은 $-x-y=3$에서 $y=-x-3$이다. 이를 ㉡에 대입하여 정리하면 $x^2+3x-10=0$이고 $(x-2)(x+5)=0$에서 $x<0$이므로 $x=-5$이다. 이를 ㉠에 대입하면 $y=2$이므로 $(x, y)=(-5, 2)$이다.

(ii) $x\ge0$일 때, $|x|=x$이고 ㉠은 $x-y=3$에서 $y=x-3$이다. 이를 ㉡에 대입하여 정리하면 $x^2-3x-10=0$이고 $(x+2)(x-5)=0$에서 $x\ge0$이므로 $x=5$이다. 이를 ㉠에 대입하면 $y=2$이므로 $(x, y)=(5, 2)$이다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 연립방정식의 해는 $(x, y)=(-5, 2), (5, 2)$이므로 xy의 최댓값은 $(x, y)=(5, 2)$일 때, 10이다.

답 10

개념

03. 두 이차방정식으로 이루어진 연립방정식

262 중요

연립방정식 $\begin{cases} x^2-6y^2=xy \\ x^2+2xy-2y-1=0 \end{cases}$ 을 푸시오.

주어진 연립방정식을 $\begin{cases} x^2-6y^2=xy & \cdots ㉠ \\ x^2+2xy-2y-1=0 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 이라 하자. ㉠의 우변을 이항하여 인수분해하면 $x^2-xy-6y^2=(x+2y)(x-3y)=0$에서 $x=-2y$ 또는 $x=3y$

(i) $x=-2y$를 ㉡에 대입하여 정리하면 $-2y-1=0$에서 $y=-\frac{1}{2}$이다.

따라서 $(x, y)=\left(1, -\frac{1}{2}\right)$이다.

(ii) $x=3y$를 ㉡에 대입하여 정리하면 $15y^2-2y-1=(3y-1)(5y+1)=0$에서 $y=\frac{1}{3}$ 또는 $y=-\frac{1}{5}$이다. 따라서 $(x, y)=\left(1, \frac{1}{3}\right), \left(-\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}\right)$이다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 연립방정식의 해는 다음과 같다.

$$(x, y)=\left(1, -\frac{1}{2}\right), \left(1, \frac{1}{3}\right), \left(-\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}\right)$$

답 $(x, y)=\left(1, -\frac{1}{2}\right), \left(1, \frac{1}{3}\right), \left(-\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}\right)$

263

연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2-4x+3y+2=0 \\ x^2+y^2-3x+6y+4=0 \end{cases}$ 을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $x-y$의 최솟값을 구하시오.

주어진 연립방정식을 $\begin{cases} x^2+y^2-4x+3y+2=0 & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2-3x+6y+4=0 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 이라 하자. ㉠−㉡을 하여 이차항을 소거하면 $-x-3y-2=0$에서 $x=-3y-2$이다. ㉠에 대입하여 정리하면

$$10y^2+27y+14=(y+2)(10y+7)=0$$

에서 $y=-2$ 또는 $y=-\frac{7}{10}$이다. $y=-2$일 때 $x=4$이고, $y=-\frac{7}{10}$일 때 $x=\frac{1}{10}$이다. 따라서 주어진 연립방정식의 해는

$$(x, y)=(4, -2), \left(\frac{1}{10}, -\frac{7}{10}\right)$$

이고 $x-y$는 $(x, y)=\left(\frac{1}{10}, -\frac{7}{10}\right)$일 때, 최솟값 $\frac{4}{5}$를 가진다.

답 $\frac{4}{5}$

264

연립방정식 $\begin{cases} 2x^2-xy+y^2=1 \\ 2x^2-7xy+2y^2=-1 \end{cases}$ 을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $4x^2+y^2$의 최댓값을 구하시오.

주어진 연립방정식을 $\begin{cases} 2x^2-xy+y^2=1 & \cdots ㉠ \\ 2x^2-7xy+2y^2=-1 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 이라 하자. ㉠+㉡을 하여 상수항을 소거하면

$$4x^2-8xy+3y^2=0 \quad \Rightarrow \quad (2x-y)(2x-3y)=0$$

에서 $y=2x$ 또는 $y=\frac{2}{3}x$이다.

(i) $y=2x$를 ㉠에 대입하면 $4x^2=1$에서 $x=\pm\frac{1}{2}$이므로 $y=\pm1$이다. (복호동순)

(ii) $y=\frac{2}{3}x$를 ㉠에 대입하면 $16x^2=9$에서 $x=\pm\frac{3}{4}$이므로 $y=\pm\frac{1}{2}$이다. (복호동순)

(i), (ii)에 의하여 주어진 연립방정식의 해는

$$(x, y)=\left(\frac{1}{2}, 1\right), \left(-\frac{1}{2}, -1\right), \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right)$$

이고 $(x, y)=\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right)$일 때, $4x^2+y^2$은 최댓값 $\frac{5}{2}$를 가진다.

답 $\frac{5}{2}$

개념

04. $x+y$, xy로 표현가능한 연립이차방정식

265 중요

연립방정식 $\begin{cases} x+y-xy=1 \\ 3x+3y-2xy=6 \end{cases}$ 을 푸시오.

$x+y=u$, $xy=v$라 하면 주어진 연립방정식은 $\begin{cases} u-v=1 & \cdots ㉠ \\ 3u-2v=6 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 으로 나타낼 수 있다. ㉠×3−㉡을 하여 u를 소거하면 $v=3$이고 이를 다시 ㉠에 대입하면 $u=4$이다. 즉 $x+y=4$, $xy=3$이므로 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-4t+3=0$의 두 근이다. 이때 $(t-1)(t-3)=0$에서 $t=1$ 또는 $t=3$이므로 주어진 연립방정식의 해는 $(x, y)=(1, 3), (3, 1)$이다.

답 $(x, y)=(1, 3), (3, 1)$

266

연립방정식 $\begin{cases} \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{5}{16} \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$ 을 만족시키는 두 실수 x, y에 대하여 $x+2y$의 값은? (단, $0<x<y$이다.)

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{x^2+y^2}{(xy)^2}=\frac{5}{16}$에서 $x^2+y^2=20$이므로 $(xy)^2=64$이다.
이때 $xy>0$이므로 $xy=8$이다. 또한

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=20 \quad \Rightarrow \quad (x+y)^2=36$$

이고 $x+y>0$이므로 $x+y=6$이다. 따라서 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-6t+8=0$의 두 근이다. 이때 $(t-2)(t-4)=0$에서 $t=2$ 또는 $t=4$이므로 주어진 연립방정식의 해는 $(x, y)=(2, 4), (4, 2)$이고 $x<y$이므로 $x=2$, $y=4$에서 구하는 값은 $x+2y=10$이다.

답 ④

267

연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2+3xy+1=0 \\ x+y+xy+1=0 \end{cases}$ 을 푸시오.

$x+y=u$, $xy=v$라 하면 $x^2+y^2+3xy+1=(x+y)^2+xy+1$이므로 주어진 연립방정식은 $\begin{cases} u^2+v+1=0 & \cdots ㉠ \\ u+v+1=0 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 이다. ㉠−㉡을 하여 v를 소거하면 $u^2-u=u(u-1)=0$에서 $u=0$ 또는 $u=1$이다. 이를 다시 ㉡에 대입하면 $(u, v)=(0, -1), (1, -2)$이다.

(i) $u=0$, $v=-1$일 때, x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-1=0$의 두 근이므로 $(x, y)=(1, -1), (-1, 1)$이다.

(ii) $u=1$, $v=-2$일 때, x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-t-2=0$의 두 근이므로 $(x, y)=(-1, 2), (2, -1)$이다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 연립방정식의 해는

$$(x, y)=(1, -1), (-1, 1), (-1, 2), (2, -1)$$

답 $(x, y)=(1, -1), (-1, 1), (-1, 2), (2, -1)$

개념

05. 연립이차방정식의 해의 조건

268 중요

x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} x-2y=k \\ x^2-xy+y^2=k-1 \end{cases}$ 이 오직 한 쌍의 해를 가지도록 하는 실수 k의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

주어진 연립방정식을 $\begin{cases} x-2y=k & \cdots ㉠ \\ x^2-xy+y^2=k-1 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 이라 하자. ㉠을 x에 대하여 정리하면 $x=2y+k$이고 이를 ㉡에 대입하여 정리하면 $3y^2+3ky+k^2-k+1=0$이다. 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, 주어진 연립방정식이 한 쌍의 해를 가지므로

$$D=9k^2-12(k^2-k+1)=0 \quad \Rightarrow \quad (k-2)^2=0$$

에서 구하는 실수 k의 값은 2이다.

답 ⑤

269

x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} x^2+xy-18=k^2-9k \\ x+y+3=k \end{cases}$ 의 해가 무수히 많을 때, 실수 k의 값을 구하시오.

주어진 연립방정식을 $\begin{cases} x^2+xy-18=k^2-9k & \cdots ㉠ \\ x+y+3=k & \cdots ㉡ \end{cases}$ 이라 하자. ㉠−㉡×x를 하여 이차항을 소거하면

$$(k-3)x=k^2-9k+18 \quad \Rightarrow \quad (k-3)x=(k-3)(k-6) \qquad \cdots ㉢$$

이다. k의 값에 따른 방정식 ㉢의 해를 구하면 다음과 같다.
(i) $k\neq 3$일 때, $x=k-6$이다.
(ii) $k=3$일 때, $0\cdot x=0$이므로 방정식 ㉢의 해가 무수히 많다. 따라서 주어진 연립방정식의 해가 무수히 많다.
(i), (ii)에 의하여 구하는 실수 k의 값은 3이다.

답 3

270

x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} (x+1)(y+1)=k+8 \\ (x-1)(y-1)=k-2 \end{cases}$ 이 실근을 가지지 않도록 하는 정수 k의 최솟값을 구하시오.

$x+y=u$, $xy=v$로 놓고 주어진 연립방정식을 정리하면 $\begin{cases} u+v=k+7 & \cdots ㉠ \\ u-v=-k+3 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 으로 나타낼 수 있다. ㉠과 ㉡을 연립하여 풀면 $u=5$, $v=k+2$이다. 따라서 $x+y=5$, $xy=k+2$이므로 x, y는 t에 대한 이차방정식

$$t^2-5t+k+2=0 \qquad \cdots ㉢$$

의 두 근이다. 주어진 연립방정식이 실근을 가지지 않으면 이차방정식 ㉢이 실근을 가지지 않는다. 이차방정식 ㉢의 판별식을 D라 할 때,

$$D=5^2-4(k+2)=25-4k-8<0$$

에서 $k>\frac{17}{4}$이므로 조건을 만족시키는 정수 k의 최솟값은 5이다.

답 5

개념

06. 부정방정식

271 중요

방정식 $xy-4x-2y+14=0$을 만족시키는 두 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수를 구하시오.

주어진 식을 변형하면

$$xy-4x-2y+14=(x-2)y-4(x-2)+6=0 \quad \Rightarrow \quad (x-2)(y-4)=-6$$

이다. 이때 x, y가 정수이므로 가능한 모든 경우를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x-2$	1	2	3	6	-1	-2	-3	-6
$y-4$	-6	-3	-2	-1	6	3	2	1
				⇓				
x	3	4	5	8	1	0	-1	-4
y	-2	1	2	3	10	7	6	5

방정식을 만족시키는 자연수 (x, y)의 순서쌍은 $(x, y)=(4, 1)$, $(5, 2)$, $(8, 3)$, $(1, 10)$이고 그 개수는 4이다.

답 4

272

방정식 $x-y+2=(x^2-y^2-2)\sqrt{3}$을 만족시키는 두 유리수 x, y에 대하여 $x+5y$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

주어진 등식을 정리하면 $(x-y+2)-(x^2-y^2-2)\sqrt{3}=0$에서 $x-y+2$와 x^2-y^2-2가 모두 유리수이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$\begin{cases} x-y+2=0 & \cdots ㉠ \\ x^2-y^2-2=0 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 이다. ㉠을 y에 대하여 정리하면 $y=x+2$이고 이를 ㉡에 대입하면

$$x^2-(x+2)^2-2=-4x-4-2=0 \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{3}{2}$$

이다. 이를 ㉠에 다시 대입하면 $y=\frac{1}{2}$이므로 구하는 값은 $x+5y=1$이다.

답 ①

273 상위1%

방정식 $x^4+y^4-16xy+32=0$을 만족시키는 두 실수 x, y의 순서쌍 (x, y)를 모두 구하시오.

주어진 방정식의 좌변을 $A^2+B^2=0$의 꼴로 정리하면

$$x^4+y^4-16xy+32=(x^2-y^2)^2+2(xy-4)^2=0$$

이다. 이때 x, y가 실수이므로 x^2-y^2, $xy-4$도 실수이다. 따라서 주어진 두 실수 x, y는 연립방정식 $\begin{cases} x^2-y^2=0 & \cdots ㉠ \\ xy-4=0 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 의 해와 같다. 이때 ㉠에서 $(x-y)(x+y)=0$이므로 $x=y$ 또는 $x=-y$이다.
(i) $x=y$를 ㉡에 대입하면 $y^2=4$에서 $y=\pm 2$이다. 이때 $x=\pm 2$이다. (복호동순)
(ii) $x=-y$를 ㉡에 대입하면 $y^2=-4$이므로 실수 y가 존재하지 않는다.
(i), (ii)에 의하여 두 실수 x, y의 순서쌍 (x, y)는 $(2, 2)$, $(-2, -2)$이다.

답 $(2, 2)$, $(-2, -2)$

개념

07. 공통근을 가지는 방정식

274

x에 대한 두 이차방정식

$$x^2+x+k=0, \quad 2x^2+x+3k=0$$

이 공통근 α를 가질 때, αk의 값은? (단, k는 $k\neq 0$인 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 4
④ 6 ⑤ 8

공통근 α에 대하여 $\begin{cases}\alpha^2+\alpha+k=0 & \cdots ㉠\\ 2\alpha^2+\alpha+3k=0 & \cdots ㉡\end{cases}$ 이라 하자. ㉠×3−㉡을 하여 상수항을 소거하면 $\alpha^2+2\alpha=0$에서 $\alpha(\alpha+2)=0$이다.

(i) $\alpha=0$을 ㉠에 대입하면 $k=0$이므로 문제의 조건을 만족시키지 못한다.

(ii) $\alpha=-2$를 ㉠에 대입하면 $k=-2$이다.

(i), (ii)에 의하여 $\alpha=-2$, $k=-2$이므로 구하는 값은 $\alpha k=(-2)\cdot(-2)=4$이다.

답 ③

275 중요

x에 대한 두 이차방정식

$$x^2-x-2k=0, \quad x^2-(k+1)x+k=0$$

이 오직 하나의 공통근을 가질 때, 상수 k의 값을 구하시오.

두 이차방정식의 공통근을 α라 하면 α와 k에 대한 연립이차방정식

$\begin{cases}\alpha^2-\alpha-2k=0 & \cdots ㉠\\ \alpha^2-(k+1)\alpha+k=0 & \cdots ㉡\end{cases}$ 이라 하자. ㉠−㉡을 하여 α^2항을 소거하면

$$k\alpha-3k=0 \quad \Rightarrow \quad k(\alpha-3)=0$$

에서 $k=0$ 또는 $\alpha=3$이다.

(i) $k=0$일 때, 주어진 두 이차방정식이 $x^2-x=0$으로 서로 일치하므로 공통근이 두 개이다. 따라서 문제의 조건을 만족시키지 못한다.

(ii) $\alpha=3$일 때, ㉠에 $\alpha=3$을 대입하면 $9-3-2k=0$에서 $k=3$이다. 이때 두 이차방정식 $x^2-x-6=0$, $x^2-4x+3=0$은 오직 하나의 공통근 $x=3$을 가진다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 상수 k의 값은 3이다.

답 3

276

x에 대한 두 이차방정식

$$x^2-2x-2k-2=0, \quad x^2-5x+k+1=0$$

이 양수인 공통근 α를 가질 때, α의 값을 구하시오.

α와 k에 대한 연립이차방정식 $\begin{cases}\alpha^2-2\alpha-2k-2=0 & \cdots ㉠\\ \alpha^2-5\alpha+k+1=0 & \cdots ㉡\end{cases}$ 이라 하자. ㉠−㉡을 하여 α^2항을 소거하면 $\alpha=k+1$ … ㉢ 이다. 이를 ㉠에 대입하면

$$(k+1)^2-2(k+1)-2k-2=0 \quad \Rightarrow \quad (k+1)(k-3)=0$$

에서 $k=-1$ 또는 $k=3$이다.

(i) $k=-1$일 때, ㉢에서 $\alpha=0$이다.

(ii) $k=3$일 때, ㉢에서 $\alpha=4$이다.

(i), (ii)에 의하여 양수인 공통근 α는 4이다.

답 4

277 상위 1%

x에 대한 두 방정식

$$x^3-5x^2+2x+8=0, \quad x^2-kx-4=0$$

이 서로 다른 두 개의 공통근을 가질 때, 상수 k의 값을 구하시오.

$f(x)=x^3-5x^2+2x+8$이라 할 때, $f(-1)=0$이므로 $f(x)$는 $x+1$을 인수로 가진다. 이를 이용하여 삼차식 $f(x)$를 인수분해하면

$$f(x)=(x+1)(x^2-6x+8)=(x+1)(x-2)(x-4)$$

이다. 따라서 삼차방정식 $f(x)=0$의 해는 $x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$이다. 한편, x에 대한 이차방정식 $x^2-kx-4=0$의 두 근을 α, β ($\alpha<\beta$)라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=k, \quad \alpha\beta=-4$$

이고 α, β는 -1, 2, 4 중 두 수이므로 $\alpha=-1$, $\beta=4$이다. 따라서 구하는 값은 $k=\alpha+\beta=-1+4=3$이다.

답 3

개념

08. 연립방정식의 활용

278 중요

어떤 두 정사각형의 넓이의 합이 52이고 이 두 정사각형의 한 변의 길이를 각각 2씩 늘린 두 정사각형의 넓이의 합이 100일 때, 한 변의 길이가 작은 정사각형의 둘레의 길이를 구하시오.

두 정사각형의 한 변의 길이를 각각 x, y (단, $x<y$)라 할 때, 문제의 조건에서

$\begin{cases}x^2+y^2=52 & \cdots ㉠\\ (x+2)^2+(y+2)^2=100 & \cdots ㉡\end{cases}$ 이 성립한다. ㉠−㉡을 하여 이차항을 소거하고 y에 대하여 정리하면 $y=-x+10$이다. 이를 ㉠에 다시 대입하면

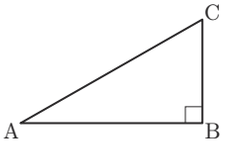
$$x^2+(-x+10)^2=52 \quad \Rightarrow \quad x^2-10x+24=0$$

에서 $(x-4)(x-6)=0$이므로 $x=4$ 또는 $x=6$이다. 즉, $(x, y)=(4, 6), (6, 4)$에서 $x<y$이므로 $(x, y)=(4, 6)$이다. 따라서 한 변의 길이가 작은 정사각형의 한 변의 길이는 4이고, 그 둘레의 길이는 16이다.

답 16

279

오른쪽 그림과 같이 $\angle B=90°$인 직각삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 둘레의 길이가 20이고 넓이가 10일 때, 선분 AB의 길이를 구하시오. (단, $\overline{AB}>\overline{BC}$)



직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=x$, $\overline{BC}=y$라 하면 피타고라스의 정리에 의하여 $\overline{AC}=\sqrt{x^2+y^2}$이다. 삼각형 ABC의 둘레의 길이가 20이므로

$$x+y+\sqrt{x^2+y^2}=20 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x^2+y^2}=20-(x+y)$$

에서 양변을 제곱하면

$$x^2+y^2=400-40(x+y)+(x+y)^2 \quad \Rightarrow \quad xy-20(x+y)+200=0 \quad \cdots ㉠$$

이다. 한편, 삼각형 ABC의 넓이가 10에서 $\frac{1}{2}xy=10$이므로 $xy=20$이고 이를 ㉠에 대입하면 $x+y=11$이다. 따라서 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-11t+20=0$의 두 근이고 $t=\frac{11\pm\sqrt{41}}{2}$에서 $x>y$이므로 구하는 값은 $\overline{AB}=x=\frac{11+\sqrt{41}}{2}$이다.

답 $\frac{11+\sqrt{41}}{2}$

280

x에 대한 세 이차방정식

$$ax^2+(a+2)x+2=0,\quad x^2+ax+1=0,\quad x^2+2x+3a+3=0$$

이 오직 하나의 공통근을 가질 때, 공통근이 아닌 나머지 근의 합을 구하시오.

주어진 세 이차방정식을 $\begin{cases} ax^2+(a+2)x+2=0 & \cdots ㉠ \\ x^2+ax+1=0 & \cdots ㉡ \\ x^2+2x+3a+3=0 & \cdots ㉢ \end{cases}$ 이라 할 때, ㉠+㉡+㉢을 하면 $(a+2)x^2+(2a+4)x+3a+6=(a+2)(x^2+2x+3)=0$이다. 이차방정식 $x^2+2x+3=0$의 판별식을 D라 할 때, $\frac{D}{4}=1^2-3<0$에서 이차방정식 $x^2+2x+3=0$은 서로 다른 두 허근 ω, $\overline{\omega}$를 가진다. 그런데 ω가 공통근이면 $\overline{\omega}$도 공통근이다. 따라서 오직 하나의 공통근을 가진다는 조건을 만족시키지 못하므로 $x^2+2x+3\neq0$이고 $a=-2$이다. 이를 각각의 이차방정식에 대입하여 풀면

(i) ㉠에서 $-2x^2+2=-2(x+1)(x-1)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$이다.

(ii) ㉡에서 $x^2-2x+1=(x-1)^2=0$에서 $x=1$ (중근)이다.

(iii) ㉢에서 $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=-3$이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 공통근은 1이고 나머지 근의 합은 $-1-3=-4$이다.

답 -4

281 마타

x, y에 대한 방정식 $(x+100)(y+100)=p^5$을 만족시키는 두 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수가 2일 때, 소수 p의 최솟값을 구하시오.

p^5의 값은 양수이므로 자연수 x, y에 대하여 $x+100$, $y+100$은 모두 자연수이다. 방정식의 해가 될 수 있는 가능한 모든 경우를 표로 나타내면

$x+100$	1	p	p^2	p^3	p^4	p^5
$y+100$	p^5	p^4	p^3	p^2	p	1
			⇓			
x	-99	$p-100$	p^2-100	p^3-100	p^4-100	p^5-100
y	p^5-100	p^4-100	p^3-100	p^2-100	$p-100$	-99

자연수 (x, y)의 순서쌍의 개수가 2이므로 $(x, y)=(p^2-100, p^3-100)$, (p^3-100, p^2-100) 뿐이다. 즉, p^2-100이 양수이고, $p-100$이 음수이다. 이때 $7^2=49$, $11^2=121$이므로 100 이하의 소수 중에서 제곱의 값이 100보다 큰 소수의 최솟값은 11이다. 따라서 소수 p의 최솟값은 11이다.

답 11

282

x에 대한 삼차방정식 $x^3-10x^2-kx+k=0$의 세 근이 모두 자연수일 때, 상수 k의 값을 구하시오.

주어진 삼차방정식의 세 근을 α, β, γ $(\alpha>0, \beta>0, \gamma>0)$라 할 때,

근과 계수의 관계에 의하여 $\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=10 & \cdots ㉠ \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-k & \cdots ㉡ \\ \alpha\beta\gamma=-k & \cdots ㉢ \end{cases}$ 이다.

이때 ㉠에서 $\beta+\gamma=10-\alpha$ $\cdots ㉣$ 이고

㉡, ㉢에서 k를 소거하면 $\alpha(\beta+\gamma)=(\alpha-1)\beta\gamma$ $\cdots ㉤$ 이다.

㉣을 ㉤에 대입하면 $\alpha(10-\alpha)=(\alpha-1)\beta\gamma$ $\cdots ㉥$ 이다. $\alpha\neq1$이므로 양변을 1로 나누면 $\beta\gamma=-\alpha+9+\frac{9}{\alpha-1}$이다. α, β, γ가 자연수이므로 $\alpha-1$은 9의 양의 약수 1, 3, 9 중 하나이다. 즉, α는 2, 4, 10중 하나이다.

(i) $\alpha=2$일 때, ㉥에 대입하면 $\beta\gamma=16$이므로 $\alpha\beta\gamma=32$이다.

(ii) $\alpha=4$일 때, ㉥에 대입하면 $\beta\gamma=8$이므로 $\alpha\beta\gamma=32$이다.

(iii) $\alpha=10$일 때, ㉠에 의하여 $\beta+\gamma=0$이지만, 이를 만족하는 자연수 β, γ는 없다.

따라서 (i)~(iii)에 의하여 구하는 k의 값은 $k=-\alpha\beta\gamma=-32$이다.

답 -32

283 마타

이차함수 $f(x)=x^2+1$에 대하여 $a\le b$인 두 실수 a, b가 다음 조건을 만족시킬 때, 모든 b의 값의 합을 구하시오.

(가) $|a|+|b|=8$
(나) $a\le x\le b$에서 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합은 38이다.

이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점이 $(0, 1)$이므로 a, b의 범위를 나누어 풀면

(i) $a\le0\le b$인 경우, 조건 (나)에 의하여 $a\le x\le b$에서 $f(x)$는 $x=0$에서 최솟값 1을 가진다. 이때 $f(x)$의 최댓값은 $f(a)$ 또는 $f(b)$이다.

i) $f(a)$가 최댓값인 경우 $1+f(a)=38$ $\Rightarrow$ $a^2=36$에서 $a\le0$이므로 $a=-6$이고 조건 (가)에서 $b\ge0$이므로 $b=2$이다. 이때, $f(a)>f(b)$이다.

ii) $f(b)$가 최댓값인 경우 조건 (나)에 의하여 $1+f(b)=38$ $\Rightarrow b^2=36$에서 $b\ge0$이므로 $b=6$이고 조건 (가)에서 $a\le0$이므로 $a=-2$이다. 이때, $f(a)<f(b)$이다.

i), ii)에 의하여 $b=2$ 또는 $b=6$이다.

(ii) $a\le b<0$인 경우, $a\le x\le b$에서 $f(x)$는 $x=a$일 때 최댓값 $f(a)$를, $x=b$일 때 최솟값 $f(b)$를 가진다. 따라서 $f(a)+f(b)=38$이고 $a+b=-8$이므로

$\begin{cases} a+b=-8 & \cdots ㉠ \\ a^2+b^2=36 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 이다. ㉠을 b에 대하여 정리하면 $b=-a-8$이고 이를 ㉡에 대입하여 정리하면 $a^2+8a+14=0$이다. 이때 근의 공식을 이용하면 $(a, b)=(-4\pm\sqrt{2}, -4\mp\sqrt{2})$이고 (복호동순) $a\le b<0$이므로 $(a, b)=(-4-\sqrt{2}, -4+\sqrt{2})$이다.

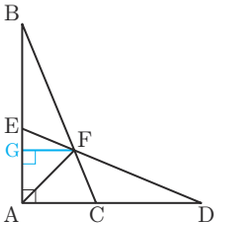
(iii) $0<a\le b$인 경우, $a\le x\le b$에서 $f(x)$는 $x=a$일 때 최솟값 $f(a)$를, $x=b$일 때 최댓값 $f(b)$를 가진다. (ii)와 같은 방법으로 연립방정식을 만들어 풀면 $(a, b)=(4-\sqrt{2}, 4+\sqrt{2})$이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 b의 값의 합은 $8+2\sqrt{2}$이다.

답 $8+2\sqrt{2}$

284 마타

$\overline{AB}>\overline{AC}$이고 $\angle A=90°$인 직각삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC와 합동인 삼각형 ADE에 대하여 오른쪽 그림과 같이 선분 AC는 선분 AD 위에 있고 선분 AE는 선분 AB 위에 있다. 선분 BC와 선분 DE의 교점을 F라 할 때, $\overline{AF}=\frac{8}{9}\sqrt{2}$이다. 삼각형 ABC의 둘레의 길이가 8일 때, 선분 AB의 길이를 구하시오.



그림과 같이 점 F에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 G라 하자.

$\overline{AB}=x$, $\overline{AC}=y$, $\overline{AG}=z$라 할 때, $\overline{FG}=z$이므로 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{AF}^2=\frac{128}{81},\quad \overline{AF}^2=\overline{AG}^2+\overline{FG}^2=2z^2$$

이므로 $z=\frac{8}{9}$이다. $\overline{BG}=x-z$이고 두 삼각형 ABC, GBF가 서로 닮음이므로

$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{GB}}{\overline{GF}}$에서 $\frac{x}{y}=\frac{x-z}{z}$이다. 이를 정리하면 $(x+y)z=xy$에서

$x+y=\frac{9}{8}xy$ $\cdots ㉠$ 이다. 한편, $\overline{BC}=\sqrt{x^2+y^2}$이고 삼각형 ABC의 둘레의 길이가 8이므로 $x+y+\sqrt{x^2+y^2}=8$이다. 즉, $\sqrt{x^2+y^2}=8-(x+y)$이고 이를 제곱하면

$$x^2+y^2=64-16(x+y)+(x+y)^2 \quad\Rightarrow\quad 8(x+y)-xy=32 \qquad \cdots ㉡$$

이다. 이때 ㉠을 ㉡에 대입하면 $xy=4$이므로 $x+y=\frac{9}{2}$이다. 따라서 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-\frac{9}{2}t+4=0$의 두 근이고 이 이차방정식을 풀면 $t=\frac{9\pm\sqrt{17}}{4}$이다.

이때 $x>y$이므로 구하는 값은 $x=\overline{AB}=\frac{9+\sqrt{17}}{4}$이다.

답 $\frac{9+\sqrt{17}}{4}$

서 술 형

• 풀이 과정에 점수가 부여되니 풀이 과정 및 정답을 상세하게 서술하세요.

285

연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2+|x-y|=6 \\ x^2+y^2-|x-y|=2 \end{cases}$ 를 푸시오.

절댓값의 성질에 의하여 $x<y$일 때, $|x-y|=-x+y$이고 $x\geq y$일 때, $|x-y|=x-y$이다. [20%]

(i) $x<y$일 때, 주어진 연립방정식은 $\begin{cases} x^2+y^2-x+y=6 & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2+x-y=2 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 이다. ㉠−㉡을 하여 이차항을 소거하면 $-2x+2y=4$에서 $x=y-2$이고 이를 ㉠에 대입하면

$$(y-2)^2+y^2-(y-2)+y=6 \quad \Rightarrow \quad y(y-2)=0$$

이다. $y=0$일 때, $x=-2$이고, $y=2$일 때, $x=0$이다. 따라서 $(x, y)=(-2, 0), (0, 2)$이다. [35%]

(ii) $x\geq y$일 때, 주어진 연립방정식은 $\begin{cases} x^2+y^2+x-y=6 & \cdots ㉢ \\ x^2+y^2-x+y=2 & \cdots ㉣ \end{cases}$ 이다. ㉢−㉣을 하여 이차항을 소거하면 $2x-2y=4$에서 $x=y+2$이고 이를 ㉠에 대입하면

$$(y+2)^2+y^2+(y+2)-y=6 \quad \Rightarrow \quad y(y+2)=0$$

이다. $y=0$일 때 $x=2$이고 $y=-2$일 때 $x=0$이다. 따라서 $(x, y)=(2, 0), (0, -2)$이다. [35%]

(i), (ii)에 의하여 주어진 연립방정식을 만족시키는 실수 x, y는 $(x, y)=(-2, 0), (0, 2), (2, 0), (0, -2)$이다. [10%]

답 $(x, y)=(-2, 0), (0, 2), (2, 0), (0, -2)$

286

x, y에 대한 두 이차방정식

$$x^2+ax-3b=0, \quad x^2-3bx+a=0$$

이 공통근을 가지고, 공통근이 아닌 나머지 두 근의 차의 절댓값이 2이다. 두 양수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

두 이차방정식의 공통근을 α라 할 때, $\begin{cases} \alpha^2+a\alpha-3b=0 & \cdots ㉠ \\ \alpha^2-3b\alpha+a=0 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 이다. ㉠−㉡을 하여 α^2항을 소거하여 정리하면

$$(a+3b)\alpha-(3b+a)=(a+3b)(\alpha-1)=0$$

에서 $a=-3b$ 또는 $\alpha=1$이다. [30%]

$a=-3b$이면 a, b 모두 양수가 될 수 없으므로 $\alpha=1$이다. 이를 ㉠에 대입하면 $1+a-3b=0$에서 $a=3b-1$이다. [20%]

$a=3b-1$을 주어진 두 이차방정식에 각각 대입하면

$$x^2+(3b-1)x-3b=(x-1)(x+3b)=0$$

$$x^2-3bx+(3b-1)=(x-1)(x-3b+1)=0$$

이다. 따라서 공통근이 아닌 두 근은 $-3b$, $3b-1$이다. [30%]

공통근이 아닌 두 수의 차의 절댓값이 2이므로

$$|3b-1-(-3b)|=|6b-1|=2$$

에서 $6b-1=2$ 또는 $6b-1=-2$이다. 각각의 방정식을 풀면 $b=\frac{1}{2}$ 또는 $b=-\frac{1}{6}$

이고 b가 양수이므로 $b=\frac{1}{2}$이다. 따라서 $a=3b-1=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$이고 구하는 값은 $a+b=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$이다. [20%]

답 1

287 단계형

삼차방정식 $x^3+1=0$의 허근 중에서 허수부분이 음수인 근을 ω라 하자. $z^2=\omega^{25}$을 만족시키는 복소수 z를 $z=a+bi$라 할 때, 다음 물음에 답하시오. (단, a, b는 실수이다.)

(1) ω의 값을 구하시오.

(2) a^2-b^2, ab의 값을 각각 구하시오.

(3) 두 실수 a, b의 순서쌍 (a, b)를 모두 구하시오.

(1) 주어진 삼차방정식은 $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)=0$이므로 삼차방정식의 근은 $x=-1$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$이다. 문제의 조건에서 ω가 허근이고 허수부분이 음수이므로 $\omega=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$이다.

(2) $\omega^3=-1$에서 $\omega^{25}=(\omega^3)^8\cdot\omega=\omega$이므로 $z^2=\omega=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$이다. 따라서

$$z^2=(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}$$

에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$\begin{cases} a^2-b^2=\frac{1}{2} & \cdots ㉠ \\ 2ab=-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad ab=-\frac{\sqrt{3}}{4} \quad \cdots ㉡$$

이다.

(3) $a\neq0$이므로 ㉡에서 $b=-\frac{\sqrt{3}}{4a}$이고 이를 ㉠에 대입하여 정리하면 $a^2-\frac{3}{16a^2}-\frac{1}{2}=0$이다. 양변에 $16a^2$을 곱하면

$$16a^4-8a^2-3=(4a^2+1)(4a^2-3)=0$$

에서 $a^2=\frac{3}{4}$이고 $a=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$이다.

(i) $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$일 때, ㉡에 대입하면 $b=-\frac{1}{2}$이다.

(ii) $a=-\frac{\sqrt{3}}{2}$일 때, ㉡에 대입하면 $b=\frac{1}{2}$이다.

(i), (ii)에 의하여 $(a, b)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$이다.

답 (1) $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ (2) $a^2-b^2=\frac{1}{2}$, $ab=-\frac{\sqrt{3}}{4}$ (3) $(a, b)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

09 여러 가지 부등식

01 연립일차부등식

1. 연립일차부등식의 풀이

(1) 각 부등식을 풀어 해를 수직선 위에 나타낸 후 공통범위를 찾는다.

(2) $A<B<C$의 꼴인 연립부등식은 $A<B$, $B<C$로 바꾸어 푼다.

2. 절댓값 기호를 포함한 부등식

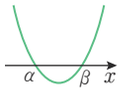
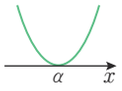
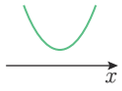
$0<a<b$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $|x|<a$이면 $-a<x<a$, $|x|>a$이면 $x<-a$ 또는 $x>a$

(2) $a<|x|<b$이면 $-b<x<-a$ 또는 $a<x<b$

02 이차부등식

이차부등식과 이차함수의 관계: 이차방정식 $ax^2+bx+c=0\,(a>0)$의 판별식을 $D=b^2-4ac$라 하고, 두 실근을 가지는 경우 두 실근을 α, $\beta\,(\alpha\le\beta)$라 하면 이차부등식의 해는 다음과 같다.

판별식	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$y=ax^2+bx+c$의 그래프			
$ax^2+bx+c>0$	$x<\alpha$ 또는 $x>\beta$	$x\ne\alpha$인 모든 실수	모든 실수
$ax^2+bx+c\ge0$	$x\le\alpha$ 또는 $x\ge\beta$	모든 실수	모든 실수
$ax^2+bx+c<0$	$\alpha<x<\beta$	해가 없다	해가 없다
$ax^2+bx+c\le0$	$\alpha\le x\le\beta$	$x=\alpha$	해가 없다

03 연립이차부등식

1. 연립이차부등식의 풀이: 각 부등식을 풀어서 수직선 위에 나타낸 후 공통범위를 찾는다.

2. 이차방정식과 이차부등식: 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 실근 α, β, 판별식 D에 대하여

(1) 두 근이 모두 양수 $\iff$ $D\ge0$, $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$

(2) 두 근이 모두 음수 $\iff$ $D\ge0$, $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$

(3) 두 근이 서로 다른 부호 $\iff$ $\alpha\beta<0$

3. 이차방정식의 근의 분리 : 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식 D와 두 실수 p, $q\,(p<q)$에 대하여

(1) 두 근이 모두 p보다 크다. $\iff$ $D\ge0$, $-\dfrac{b}{2a}>p$, $f(p)>0$

(2) 두 근이 모두 p보다 작다. $\iff$ $D\ge0$, $-\dfrac{b}{2a}<p$, $f(p)>0$

(3) 두 근 사이에 p가 있다. $\iff$ $f(p)<0$

(4) 두 근이 p, q 사이에 있다. $\iff$ $D\ge0$, $p<-\dfrac{b}{2a}<q$, $f(p)>0$, $f(q)>0$

마·타·노·트

▶ **절댓값 기호가 2개 이상일 때**

절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 미지수의 값을 기준으로 범위를 나누어서 푼다.

▶ **해가 주어진 이차부등식**

두 실수 α, $\beta\,(\alpha<\beta)$에 대하여 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

1. 해가 $\alpha<x<\beta$: $(x-\alpha)(x-\beta)<0$
2. 해가 $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$: $(x-\alpha)(x-\beta)>0$
3. 해가 $x=\alpha$: $(x-\alpha)^2\le0$
4. 해가 $x\ne\alpha$인 모든 실수: $(x-\alpha)^2>0$

▶ **이차부등식과 이차방정식**

이차부등식 $ax^2+bx+c<0$의 해가 $\alpha<x<\beta$이면 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계를 이용하여 실수 a, b, c의 값을 구할 수도 있다.

▶ **두 근이 서로 다른 부호**

두 근이 서로 다른 부호인 경우 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\dfrac{c}{a}<0$이므로 $ac<0$이다.

이때, $D=b^2-4ac>0$이므로 항상 서로 다른 두 실근을 가진다.

288 2014학년도 11월 교육청

개념 05

최고차항의 계수가 각각 $\frac{1}{2}$, 2인 두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=p$를 축으로 한다.
(나) 부등식 $f(x)\ge g(x)$의 해는 $-1\le x\le 5$이다.

$p\times\{f(2)-g(2)\}$의 값은? (단, p는 상수이다.)

최고차항의 계수가 각각 $\frac{1}{2}$, 2인 두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 축은 직선 $x=p$이므로

$$f(x)=\frac{1}{2}(x-p)^2+a,\quad g(x)=2(x-p)^2+b$$

이다. 조건 (나)에서 $g(x)-f(x)\le 0$이므로

$$g(x)-f(x)=\frac{3}{2}x^2-3px+\frac{3}{2}p^2+b-a\le 0 \quad \cdots ㉠$$

이다. 또한 부등식 $f(x)\ge g(x)$의 해가 $-1\le x\le 5$이므로 최고차항의 계수가 $\frac{3}{2}$인 이차부등식은

$$\frac{3}{2}(x+1)(x-5)\le 0 \Rightarrow \frac{3}{2}x^2-6x-\frac{15}{2}\le 0 \quad \cdots ㉡$$

이다. 두 부등식 ㉠과 ㉡이 같은 부등식이므로

$$-3p=-6,\quad \frac{3}{2}p^2+b-a=-\frac{15}{2} \Rightarrow p=2,\quad a-b=\frac{27}{2}$$

이다. 따라서 구하는 값은

$$p\times\{f(2)-g(2)\}=2\times(a-b)=2\times\frac{27}{2}=27$$

답 27

289 2012학년도 11월 교육청

개념 07

x에 대한 연립부등식

$$\begin{cases}x^2+ax+b\ge 0\\ x^2+cx+d\le 0\end{cases}$$

의 해가 $1\le x\le 3$ 또는 $x=4$일 때, $a+b+c+d$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

x에 대한 두 이차부등식 $x^2+ax+b\ge 0$과 $x^2+cx+d\le 0$의 해를 수직선에 나타내면 그림과 같다.



그림에서 $x^2+ax+b\ge 0$의 해는 $x\le 3$ 또는 $x\ge 4$이므로

$$(x-3)(x-4)\ge 0 \Rightarrow x^2-7x+12\ge 0$$

에서 $a=-7$, $b=12$이다. $x^2+cx+d\le 0$의 해는 $1\le x\le 4$이므로

$$(x-1)(x-4)\le 0 \Rightarrow x^2-5x+4\le 0$$

에서 $c=-5$, $d=4$이다. 따라서 구하는 값은 $a+b+c+d=-7+12-5+4=4$이다.

답 ④

290 2016학년도 06월 교육청

개념 06, 07

모든 실수 x에 대하여 부등식

$$-x^2+3x+2\le mx+n\le x^2-x+4$$

가 성립할 때, m^2+n^2의 값은? (단, m, n은 상수이다.)

① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

모든 실수 x에 대하여 $-x^2+3x+2\le mx+n$이므로 $x^2+(m-3)x+n-2\ge 0$이다. x에 대한 이차방정식 $x^2+(m-3)x+n-2=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$$D_1=(m-3)^2-4n+8\le 0 \Rightarrow 4n\ge m^2-6m+17 \quad \cdots ㉠$$

이다. 또한 모든 실수 x에 대하여 $mx+n\le x^2-x+4$이므로 $x^2-(m+1)x+4-n\ge 0$이다. x에 대한 이차방정식 $x^2-(m+1)x+4-n=0$의 판별식을 D_2라 하면

$$D_2=(m+1)^2-16+4n\le 0 \Rightarrow 4n\le -m^2-2m+15 \quad \cdots ㉡$$

이다. 따라서 ㉠, ㉡에 의하여

$$m^2-6m+17\le 4n\le -m^2-2m+15 \Rightarrow 2m^2-4m+2\le 0$$

이다. $2(m-1)^2\le 0$이므로 $m=1$이고 ㉠, ㉡에 각각 $m=1$을 대입하면 $12\le 4n\le 12$이므로 $n=3$이다. 따라서 구하는 값은 $m^2+n^2=10$이다.

답 ②

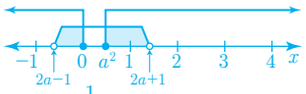
291 2017학년도 06월 교육청

개념 06, 07

x에 대한 연립부등식 $\begin{cases}x^2-a^2x\ge 0\\ x^2-4ax+4a^2-1<0\end{cases}$을 만족시키는 정수 x의 개수가 1이 되기 위한 모든 실수 a의 값의 합을 구하시오. (단, $0<a<\sqrt{2}$)

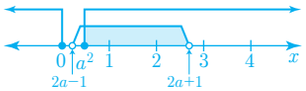
$x^2-a^2x=x(x-a^2)\ge 0$에서 $x\le 0$ 또는 $x\ge a^2$이고 $x^2-4ax+4a^2-1<0$에서 $\{x-(2a-1)\}\{x-(2a+1)\}<0$이므로 $2a-1<x<2a+1$이다.

(i) $0<a<\frac{1}{2}$일 때, 연립부등식의 해는 $-1<2a-1<x\le 0$ 또는 $a^2\le x<2a+1<2$인데 $0<a^2<\frac{1}{4}$이고 $1<2a+1<2$이므로 $x=0$, 1로 정수해가 2개 존재한다.



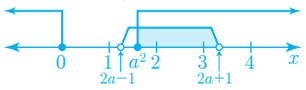
(ii) $a=\frac{1}{2}$일 때, 연립부등식의 해는 $\frac{1}{4}=a^2\le x<2a+1=2$이므로 $x=1$로 정수해가 1개 존재한다.

(iii) $\frac{1}{2}<a<1$일 때, 연립부등식의 해는 $a^2\le x<2a+1$인데 $\frac{1}{4}<a^2<1$이고 $2<2a+1<3$이므로 $x=1$, 2로 정수해가 2개 존재한다.



(iv) $a=1$일 때, 연립부등식의 해는 $1=a^2=2a-1<x<2a+1=3$이므로 $x=2$로 정수해가 1개 존재한다.

(v) $1<a<\sqrt{2}$일 때, 연립부등식의 해는 $a^2\le x<2a+1$인데 $1<a^2<2$이고 $3<2a+1<1+2\sqrt{2}<4$이므로 $x=2$, 3으로 정수해가 2개 존재한다.



(i)~(v)에 의하여 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=1$일 때, 정수해가 1개 존재한다. 따라서 모든 실수 a의 값의 합은 $\frac{3}{2}$이다.

답 $\frac{3}{2}$

개념 치료

개념

01. 부등식 $ax>b$의 풀이

292

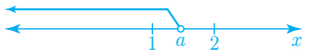
x에 대한 부등식 $ax+2a>2x+a^2$을 만족하는 가장 큰 정수가 1일 때, 상수 a의 값의 범위를 구하시오.

부등식 $ax+2a>2x+a^2$에서 $(a-2)x>a(a-2)$이다.

(i) $a>2$일 때, $a-2>0$이므로 해는 $x>a$이다. 이때 이를 만족하는 가장 큰 정수해는 없다.

(ii) $a=2$일 때, 주어진 부등식이 $0\cdot x>0$이 되어 해가 없으므로 가장 큰 정수해는 없다.

(iii) $a<2$일 때, $a-2<0$이므로 해는 $x<a$이다. 부등식을 만족하는 가장 큰 정수가 1이므로 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.



따라서 $1<a\le 2$이다. 이때 $a<2$이므로 $1<a<2$이다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 상수 a의 값의 범위는 $1<a<2$이다.

답 $1<a<2$

293 중요

x에 대한 부등식 $(a+2b)x-2a+5b\ge 0$의 해가 없을 때, x에 대한 부등식 $(3a+b)x-2a+b>0$의 해를 구하시오.

(단 a, b는 상수이다.)

부등식 $(a+2b)x-2a+5b\ge 0$에서 $(a+2b)x\ge 2a-5b$이고 이 부등식의 해가 없으므로 $\begin{cases} a+2b=0 & \cdots ㉠ \\ 2a-5b>0 & \cdots ㉡ \end{cases}$을 만족한다. ㉠에서 $a=-2b$이고 이를 ㉡에 대입하면 $-9b>0$에서 $b<0$이다. $a=-2b$를 부등식 $(3a+b)x-2a+b>0$에 대입하면 $-5bx+5b>0$이고 $-5bx>-5b$에서 $b<0$이므로 양변을 $-5b$로 나누면 $x>1$이다.

답 $x>1$

294 상위 1%

$-2<m<2$인 모든 실수 m에 대하여 부등식 $-x+2>m(x+4)$가 성립하는 x의 값의 범위를 구하시오.

$f(m)=(x+4)m+x-2$라 하면 $y=f(m)$은 좌표평면에서 직선이다. $-2<m<2$일 때, $f(m)<0$이므로 $f(-2)\le 0$, $f(2)\le 0$이다.

(i) $f(-2)=-x-10\le 0$이므로 $x\ge -10$이다.

(ii) $f(2)=3x+6\le 0$이므로 $x\le -2$이다.

(i), (ii)에서 구하는 x의 값의 범위는 $-10\le x\le -2$이다.

답 $-10\le x\le -2$

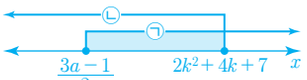
개념

02. 연립일차부등식의 풀이

295 중요

x에 대한 연립부등식 $\begin{cases} 2x+1\ge 3a \\ x-7\le 2k^2+4k \end{cases}$이 k의 값에 관계없이 해를 가지도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

x에 대한 부등식 $2x+1\ge 3a$을 풀면 $x\ge \dfrac{3a-1}{2}$ … ㉠ 이고, x에 대한 부등식 $x-7\le 2k^2+4k$을 풀면 $x\le 2k^2+4k+7$… ㉡ 이다. ㉠, ㉡를 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.



따라서 주어진 연립부등식은 $2k^2+4k+7\ge \dfrac{3a-1}{2}$일 때 해를 가진다.

$f(k)=2k^2+4k+7$이라 하면 $f(k)=2(k+1)^2+5$이므로 $f(k)$의 최솟값은 5이고, 주어진 연립부등식이 k의 값에 관계없이 해를 가지려면

$$f(k)\text{의 최솟값}=5\ge \frac{3a-1}{2} \Rightarrow a\le \frac{11}{3}$$

이다. 따라서 구하는 실수 a의 값의 범위는 $a\le \dfrac{11}{3}$이다.

답 $a\le \dfrac{11}{3}$

296

x에 대한 두 이차방정식 $x^2-4x+k=0$, $x^2+6x-k+a=0$이 모두 실근을 가지도록 하는 실수 k가 존재할 때, 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

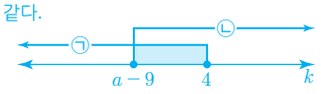
이차방정식 $x^2-4x+k=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$$\frac{D_1}{4}=(-2)^2-k\ge 0 \Rightarrow k\le 4 \quad \cdots ㉠$$

이차방정식 $x^2+6x-k+a=0$의 판별식을 D_2라 하면

$$\frac{D_2}{4}=3^2-(-k+a)\ge 0 \Rightarrow k\ge a-9 \quad \cdots ㉡$$

두 이차방정식이 모두 실근을 가지도록 하는 실수 k가 존재하므로 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.



$a-9\le 4$이므로 구하는 실수 a의 값의 범위는 $a\le 13$이다.

답 $a\le 13$

개념

03. 절댓값 기호를 포함한 부등식

297

0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=-\sqrt{\dfrac{b}{a}}$이 성립할 때, x에 대한 부등식 $|ax+1|\ge b$의 해는 $x\le -2$ 또는 $x\ge 3$이다. 이때 $a+b$의 값을 구하시오.

$\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=-\sqrt{\dfrac{b}{a}}$에서 $a<0$, $b>0$이다. 주어진 부등식 $|ax+1|\ge b$에서 $ax+1\ge b$ 또는 $ax+1\le -b$이다.

(i) $ax+1\ge b$에서 $ax\ge b-1$이므로 $x\le \dfrac{b-1}{a}$이다.

(ii) $ax+1\le -b$에서 $ax\le -b-1$이므로 $x\ge -\dfrac{b+1}{a}$이다.

주어진 부등식의 해가 $x\le -2$ 또는 $x\ge 3$이므로 (i), (ii)에 의하여

$$\begin{cases} \dfrac{b-1}{a}=-2 \Rightarrow -2a=b-1 & \cdots ㉠ \\ -\dfrac{b+1}{a}=3 \Rightarrow -3a=b+1 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

이다. ㉠−㉡에서 $a=-2$이고 ㉠에 대입하면 $b=5$이다. 따라서 구하는 값은 $a+b=3$

답 3

298

부등식 $|x+2|+\sqrt{(x-3)^2}<x+5$를 만족하는 정수 x의 개수는?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

$\sqrt{(x-3)^2}=|x-3|$이므로 주어진 부등식은 $|x+2|+|x-3|<x+5$와 같다. 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값, 즉 $x=-2$, 3을 기준으로 x의 값의 범위를 나누어 풀면 다음과 같다.

(i) $x<-2$일 때, $-(x+2)-(x-3)<x+5$, $-3x<4$에서 $x>-\frac{4}{3}$이고 $x<-2$와의 공통범위는 없다.

(ii) $-2\le x<3$일 때, $x+2-(x-3)<x+5$에서 $x>0$이고 $-2\le x<3$과의 공통범위는 $0<x<3$이다.

(iii) $x\ge 3$일 때, $x+2+x-3<x+5$에서 $x<6$이고 $x\ge 3$과의 공통범위는 $3\le x<6$이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 주어진 부등식의 해는 $0<x<6$이므로 이를 만족하는 정수 x의 개수는 5이다.

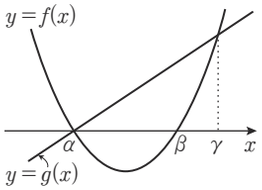
답 ①

개념

04. 이차부등식과 이차함수의 관계

299

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 오른쪽 그림과 같다. 이때 $\{f(x)\}^2<f(x)g(x)$의 해를 구하시오.



부등식 $\{f(x)\}^2<f(x)g(x)$의 우변을 이항하면 $f(x)\{f(x)-g(x)\}<0$이고 이 부등식의 해는 $f(x)>0$, $f(x)<g(x)$ 또는 $f(x)<0$, $f(x)>g(x)$를 만족시키는 x의 값의 범위이다.

(i) $f(x)>0$, $f(x)<g(x)$일 때, $\beta<x<\gamma$이다.

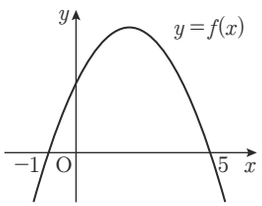
(ii) $f(x)<0$, $f(x)>g(x)$인 x는 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 구하는 부등식의 해는 $\beta<x<\gamma$이다.

답 $\beta<x<\gamma$

300 중요

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 부등식 $f(1-2x)>0$을 만족하는 x의 값의 범위를 구하시오.



$1-2x=t$라 놓으면 이차부등식 $f(t)>0$의 해는 $-1<t<5$이다. 따라서 부등식 $f(1-2x)>0$의 해는 $-1<1-2x<5$에서 $-2<x<1$이다.

답 $-2<x<1$

개념

05. 이차부등식의 풀이

301

x에 대한 이차방정식 $x^2-2kx+3k+4=0$이 서로 다른 두 실근을 가지도록 하는 자연수 k의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

이차방정식 $x^2-2kx+3k+4=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=k^2-(3k+4)=k^2-3k-4$$
$$=(k-4)(k+1)>0 \quad \Rightarrow \quad k<-1 \text{ 또는 } k>4$$

따라서 자연수 k의 최솟값은 5이다.

답 ⑤

302 중요

x에 대한 이차부등식 $x^2+4x+a>0$의 해가 $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$이고, x에 대한 이차부등식 $x^2+bx+8<0$의 해가 $1-\beta<x<1-\alpha$일 때, $a-b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

x에 대한 이차방정식 $x^2+4x+a=0$의 해가 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-4, \quad \alpha\beta=a$$

이다. 또한 x에 대한 이차방정식 $x^2+bx+8=0$의 해가 $x=1-\beta$ 또는 $x=1-\alpha$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(1-\beta)+(1-\alpha)=-(\alpha+\beta)+2=6=-b$$
$$(1-\beta)(1-\alpha)=1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta=8 \quad \Rightarrow \quad \alpha\beta=3$$

에서 $a=3$, $b=-6$이다. 따라서 구하는 값은 $a-b=9$이다.

답 9

303 상위 1%

x에 대한 부등식 $a(x-a)(x-a^2)<0$을 푸시오. (단, a는 실수이다.)

$a^2>a$, $a^2=a$, $a^2<a$인 경우를 고려하여 a의 값의 범위를 나누어 부등식을 풀면 다음과 같다.

(i) $a<0$일 때, $a<0<a^2$이므로 $(x-a)(x-a^2)>0$에서 $x<a$ 또는 $x>a^2$이다.

(ii) $a=0$일 때, $0<0$에서 해는 없다.

(iii) $0<a<1$일 때, $a^2<a$이므로 $(x-a)(x-a^2)<0$에서 $a^2<x<a$이다.

(iv) $a=1$일 때, $(x-1)^2<0$에서 해는 없다.

(v) $a>1$일 때, $a<a^2$이므로 $(x-a)(x-a^2)<0$에서 $a<x<a^2$이다.

답 풀이 참조

304

실수 a, b가 $(a+1)(a-3)=(b+1)(b-3)$을 만족할 때, x에 대한 이차부등식 $(x+1)(x-3)<(a+1)(a-3)$의 해는? (단, $a<b$이다.)

① $x<a$ ② $x>a$ ③ $x<b$

④ $x<a$ 또는 $x>b$ ⑤ $a<x<b$

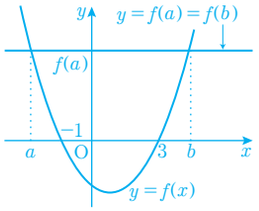
$f(x)=(x+1)(x-3)$이라 하면

$$(a+1)(a-3)=(b+1)(b-3)$$

에서 $f(a)=f(b)$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 따라서

$$(x+1)(x-3)<(a+1)(a-3)$$

즉, $f(x)<f(a)$를 만족하는 x의 값의 범위는 $a<x<b$이다.



답 ⑤

개념

06. 이차부등식이 항상 성립할 조건

305

x에 대한 부등식 $(a-1)x^2+4(a-1)x+3a-5\geq 0$이 해를 가지지 않도록 하는 하는 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

부등식 $(a-1)x^2+4(a-1)x+3a-5\geq 0$의 해가 존재하지 않으므로 모든 실수 x에 대하여

$$(a-1)x^2+4(a-1)x+3a-5<0 \quad \cdots ㉠$$

이 성립한다. x^2의 계수가 0일 때와 0이 아닐 때로 나누어 생각하자.

(i) $a=1$일 때, $0\cdot x^2+0\cdot x-2<0$이므로 주어진 부등식 ㉠은 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

(ii) $a\neq 1$일 때, 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 ㉠이 성립하므로 $a<1$이다. 또한 x에 대한 이차방정식 $(a-1)x^2+4(a-1)x+3a-5=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=\{2(a-1)\}^2-(a-1)(3a-5)=a^2-1$$

$$=(a+1)(a-1)<0 \quad \Rightarrow \quad -1<a<1$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 a의 값의 범위는 $-1<a\leq 1$이다.

답 $-1<a\leq 1$

306 중요

이차함수 $y=x^2-6x-a$의 그래프와 직선 $y=-k(2x+a)$가 실수 k의 값에 관계없이 항상 만나도록 하는 정수 a의 개수를 구하시오.

이차함수 $y=x^2-6x-a$의 그래프와 직선 $y=-k(2x+a)$가 만나면 x에 대한 이차방정식 $x^2-6x-a=-k(2x+a)$가 실근을 가진다. 이차방정식 $x^2+2(k-3)x+a(k-1)=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$$\frac{D_1}{4}=(k-3)^2-a(k-1)=k^2-(a+6)k+9+a\geq 0 \quad \cdots ㉠$$

이다. 이때 ㉠이 실수 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로 k에 대한 이차방정식 $k^2-(a+6)k+9+a=0$의 판별식을 D_2라 하면

$$D_2=(a+6)^2-4\cdot 1\cdot(9+a)$$

$$=a^2+8a=a(a+8)\leq 0 \quad \Rightarrow \quad -8\leq a\leq 0$$

따라서 구하는 정수 a는 $-8, -7, \ldots, -1, 0$으로 그 개수는 9이다.

답 9

307

모든 실수 x, y에 대하여 부등식

$$x^2+6xy+9y^2+ax+6y+b\geq 0$$

이 성립하도록 하는 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 최솟값을 구하시오.

주어진 부등식을 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$$x^2+(6y+a)x+9y^2+6y+b\geq 0 \quad \cdots ㉠$$

이다. ㉠이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 x에 대한 이차방정식 $x^2+(6y+a)x+9y^2+6y+b=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=(6y+a)^2-4(9y^2+6y+b)=(12a-24)y+a^2-4b\leq 0 \quad \cdots ㉡$$

이다. 이때, ㉡이 모든 실수 y에 대하여 성립하므로

$$12a-24=0, \quad a^2-4b\leq 0 \quad \Rightarrow \quad a=2, \quad b\geq 1$$

이다. 따라서 구하는 $a+b$의 최솟값은 3이다.

답 3

308

$-3\leq x\leq 1$일 때, x에 대한 이차부등식 $x^2-4x\geq a^2+4a$가 항상 성립하기 위한 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

$f(x)=x^2-4x=(x-2)^2-4$라 하면, $-3\leq x\leq 1$에서 함수 $y=f(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 -3을 가진다. 주어진 부등식이 항상 성립하기 위해서는 $a^2+4a\leq -3$이어야 하므로

$$a^2+4a+3\leq 0 \quad \Rightarrow \quad (a+1)(a+3)\leq 0$$

에서 구하는 a의 값의 범위는 $-3\leq a\leq -1$이다.

답 $-3\leq a\leq -1$

개념

07. 연립이차부등식의 풀이

309

x에 대한 연립부등식 $\begin{cases} x^2-x-6\geq 0 \\ x^2-2(k-1)x+k^2-2k-3\leq 0 \end{cases}$

을 만족시키는 정수 x의 개수가 3이 되도록 하는 정수 k의 값을 모두 구하시오.

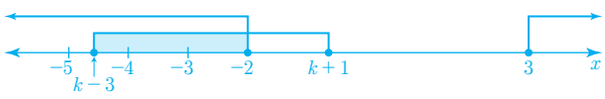
$x^2-x-6\geq 0$에서 $x^2-x-6=(x+2)(x-3)\geq 0$이므로 $x\leq -2$ 또는 $x\geq 3$이고

$$x^2-2(k-1)x+k^2-2k-3=\{x-(k+1)\}\{x-(k-3)\}\leq 0$$

이므로 $k-3\leq x\leq k+1$이다. 이때 $k-3$, $k+1$은 모두 정수이므로 부등식 $k-3\leq x\leq k+1$을 만족하는 정수 x의 개수는 5이다.

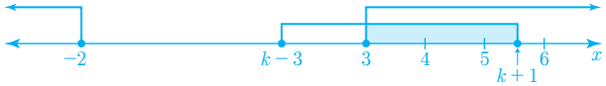
(i) $k+1\leq -2$ 또는 $k-3\geq 3$일 때, 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는 5이다.

(ii) $k-3\leq -2<k+1$일 때, 정수 x의 개수가 3이 되도록 수직선 위에 나타내면



따라서 k의 값의 범위는 $-5<k-3\leq -4$이고 정수 k의 값은 -1이다.

(iii) $k-3<3\leq k+1$일 때,정수 x의 개수가 3이 되도록 수직선 위에 나타내면



따라서 k의 값의 범위는 $5\leq k+1<6$이고 정수 k의 값은 4이다.

(i)~(iii)에 의하여 조건을 만족시키는 정수 k의 값은 $k=-1$ 또는 $k=4$이다.

답 $k=-1$ 또는 $k=4$

310

x에 대한 이차방정식 $x^2+(a+2)x+2a+1=0$이 허근을 가지고 x에 대한 이차방정식 $x^2+2ax-a+6=0$이 실근을 가지도록 하는 정수 a의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

이차방정식 $x^2+(a+2)x+2a+1=0$이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$$D_1=(a+2)^2-4\cdot1\cdot(2a+1)=a(a-4)<0 \quad \Rightarrow \quad 0<a<4 \qquad \cdots ㉠$$

이차방정식 $x^2+2ax-a+6=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$$\frac{D_2}{4}=a^2-(-a+6)=(a-2)(a+3)\geq0 \quad \Rightarrow \quad a\leq-3 \text{ 또는 } a\geq2 \qquad \cdots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통범위를 구하면 $2\leq a<4$이고 정수 a는 2, 3으로 그 개수는 2이다.

답 ②

311

x에 대한 연립부등식 $\begin{cases} x^2+ax+b>0 \\ x^2+cx+d\leq0 \end{cases}$의 해가 $-1\leq x<1$ 또는 $1<x\leq2$일 때, $a+b+c+d$의 값을 구하시오.
(단, a, b, c, d는 상수이다.)

주어진 연립부등식의 해가 $-1\leq x<1$ 또는 $1<x\leq2$이므로 이차부등식 $x^2+ax+b>0$의 해는 $x\neq1$인 실수이고 이차부등식 $x^2+cx+d\leq0$의 해는 $-1\leq x\leq2$이다. 따라서

$$x^2+ax+b=(x-1)^2=x^2-2x+1$$

에서 $a=-2$, $b=1$이고

$$x^2+cx+d=(x+1)(x-2)=x^2-x-2$$

에서 $c=-1$, $d=-2$이다. 따라서 구하는 값은 $a+b+c+d=-4$이다.

답 -4

개념

08. 이차방정식의 실근의 부호와 위치

312

x에 대한 이차방정식 $x^2-kx+k+3=0$의 두 근이 모두 양수일 때, 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

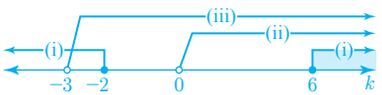
이차방정식 $x^2-kx+k+3=0$의 두 실근을 α, β라 하고 판별식을 D라 하면 두 실근이 모두 양수이므로

(i) $D=k^2-4\cdot1\cdot(k+3)=k^2-4k-12=(k+2)(k-6)\geq0$
$\Rightarrow \quad k\leq-2$ 또는 $k\geq6$

(ii) $\alpha+\beta=k>0 \quad \Rightarrow \quad k>0$

(iii) $\alpha\beta=k+3>0 \quad \Rightarrow \quad k>-3$

(i), (ii), (iii)에서 공통범위를 수직선 위에 나타내면 그림과 같다.



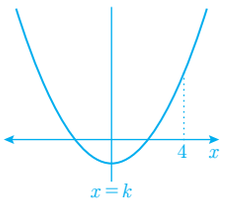
따라서 구하는 k의 값의 범위는 $k\geq6$이다.

답 $k\geq6$

313

x에 대한 이차방정식 $x^2-2kx-k+2=0$의 두 근이 모두 4보다 작을 때, 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

이차방정식 $x^2-2kx-k+2=0$의 판별식을 D라 하고, $f(x)=x^2-2kx-k+2$라 하면

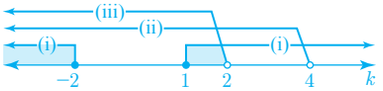


(i) $\frac{D}{4}=k^2-(-k+2)=(k-1)(k+2)\geq0$
$\Rightarrow \quad k\leq-2$ 또는 $k\geq1$

(ii) 축의 방정식은 $x=-\frac{-2k}{2}=k$이므로 $k<4$

(iii) $f(4)=16-8k-k+2>0 \quad \Rightarrow \quad k<2$

(i), (ii), (iii)에서 공통범위를 수직선 위에 나타내면 그림과 같다.



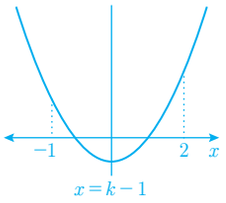
따라서 구하는 k의 값의 범위는 $k\leq-2$ 또는 $1\leq k<2$이다.

답 $k\leq-2$ 또는 $1\leq k<2$

314

x에 대한 이차방정식 $x^2-2(k-1)x-3(k-1)=0$의 두 근이 모두 -1과 2 사이에 있을 때, 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

이차방정식 $x^2-2(k-1)x-3(k-1)=0$의 판별식을 D라 하고, $f(x)=x^2-2(k-1)x-3(k-1)$라 하면



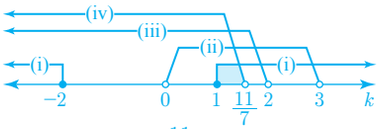
(i) $\frac{D}{4}=(k-1)^2+3(k-1)=(k+2)(k-1)\geq0$
$\Rightarrow \quad k\leq-2$ 또는 $k\geq1$

(ii) 축의 방정식은 $x=-\frac{-2(k-1)}{2}=k-1$이므로
$-1<k-1<2 \quad \Rightarrow \quad 0<k<3$

(iii) $f(-1)=1+2k-2-3k+3>0 \quad \Rightarrow \quad k<2$

(iv) $f(2)=4-4k+4-3k+3>0 \quad \Rightarrow \quad k<\frac{11}{7}$

(i), (ii), (iii), (iv)에서 공통범위를 수직선 위에 나타내면 그림과 같다.



따라서 구하는 k의 값의 범위는 $1\leq k<\frac{11}{7}$이다.

답 $1\leq k<\frac{11}{7}$

315 상위1%

x에 대한 사차방정식 $x^4-2ax^2-2a+3=0$이 실근을 가지지 않을 때, a의 값의 범위를 구하시오.

$x^2=X$라 하면, 주어진 방정식은

$$X^2-2aX-2a+3=0 \qquad \cdots ㉠$$

이다. x가 실수이면 $X\geq0$이므로 x에 대한 사차방정식 $x^4-2ax^2-2a+3=0$이 실근을 가지지 않을 때, X에 대한 이차방정식 ㉠은 두 허근을 가지거나 두 개의 음의 실근을 가진다. X에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

(i) X에 대한 이차방정식 ㉠이 두 허근을 가질 때,

$$\frac{D}{4}=a^2+2a-3=(a-1)(a+3)<0 \quad \Rightarrow \quad -3<a<1$$

(ii) X에 대한 이차방정식 ㉠이 두 음의 실근을 가질 때,

i) $\frac{D}{4}=a^2+2a-3=(a-1)(a+3)\geq0 \quad \Rightarrow \quad a\leq-3$ 또는 $a\geq1$

ii) $\alpha+\beta=2a<0 \quad \Rightarrow \quad a<0$

iii) $\alpha\beta=-2a+3>0 \quad \Rightarrow \quad a<\frac{3}{2}$

i), ii), iii)에서 X에 대한 이차방정식 ㉠이 두 음의 실근을 가질 때의 a의 값의 범위는 $a\leq-3$이다.

(i), (ii)에서 사차방정식 ㉠이 실근을 가지지 않을 때의 a의 값의 범위는 $a<1$이다.

답 $a<1$

316 마타

$|x^2-11x+18|<x+7$을 만족하는 정수 x의 개수를 구하시오.

절댓값 기호 안의 식 $x^2-11x+18$의 값의 부호를 기준으로 x의 범위를 나눈다.

(i) $x^2-11x+18<0$일 때 $(x-2)(x-9)<0$이므로 $2<x<9$이다. 이때 주어진 부등식은

$$-(x^2-11x+18)<x+7 \quad \Rightarrow \quad (x-5)^2>0$$

이므로 $x\neq5$인 모든 실수이다. 따라서 $2<x<9$와의 공통범위를 구하면 $2<x<5$ 또는 $5<x<9$이다.

(ii) $x^2-11x+18\geq0$일 때 $(x-2)(x-9)\geq0$이므로 $x\leq2$ 또는 $x\geq9$이다. 이때 주어진 부등식은

$$x^2-11x+18<x+7 \quad \Rightarrow \quad (x-1)(x-11)<0$$

이므로 $1<x<11$이다. 따라서 $x\leq2$ 또는 $x\geq9$와의 공통 범위를 구하면 $1<x\leq2$ 또는 $9\leq x<11$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $1<x<5$ 또는 $5<x<11$이다. 따라서 정수 x는 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10으로 그 개수는 8이다.

답 8

317 마타

두 이차함수 $f(x)=x^2+4x+k$, $g(x)=x^2+6x-k$에 대하여 방정식 $f(x)g(x)=0$이 서로 다른 네 실근을 가지도록 하는 정수 k의 개수를 구하시오.

x에 대한 이차방정식 $x^2+4x+k=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$$\frac{D_1}{4}=4-k>0 \quad \Rightarrow \quad k<4 \qquad \cdots ㉠$$

x에 대한 이차방정식 $x^2+6x-k=0$의 판별식을 D_2라 하면

$$\frac{D_2}{4}=9+k>0 \quad \Rightarrow \quad k>-9 \qquad \cdots ㉡$$

이다. 따라서 두 이차방정식이 각각 서로 다른 두 실근을 가지는 k의 값의 범위는 $-9<k<4$이다. 이때 두 이차방정식이 공통근을 가지면 방정식 $f(x)g(x)=0$은 서로 다른 네 실근을 가지지 않는다. 공통근을 α라 하면

$$\begin{cases}\alpha^2+4\alpha+k=0 & \cdots ㉢\\ \alpha^2+6\alpha-k=0 & \cdots ㉣\end{cases}$$

이고 ㉢+㉣을 하면

$$2\alpha^2+10\alpha=0 \quad \Rightarrow \quad 2\alpha(\alpha+5)=0$$

에서 $\alpha=0$ 또는 $\alpha=-5$이다. 이를 ㉣에 대입하면 $k=0$ 또는 $k=-5$이다. 따라서 $-9<k<4$에서 $k=0$과 $k=-5$를 제외하면 정수 k의 개수는 10이다.

답 10

318

x에 대한 이차부등식 $(b+c)x^2+(a+b)x+(c+a)>0$의 해가 $x<-5$ 또는 $x>1$일 때, x에 대한 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해를 구하시오. (단, a, b, c는 실수이다.)

이차부등식의 해가 $x<-5$ 또는 $x>1$이므로 $b+c>0$이고 이차부등식 $x^2+4x-5>0$과 계수의 비가 같다.

$$b+c=\frac{a+b}{4}=\frac{c+a}{-5}=k\,(k>0)$$

라 두면

$$b+c=k, \quad a+b=4k, \quad c+a=-5k$$

이다. 세 식의 양변을 더하고 2로 나누면 $a+b+c=0$이므로 $a=-k$, $b=5k$, $c=-4k$이다. 따라서 이를 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$에 대입하면

$$-kx^2+5kx-4k>0 \quad \Rightarrow \quad (x-1)(x-4)<0$$

이므로 $ax^2+bx+c>0$의 해는 $1<x<4$이다.

답 $1<x<4$

319 마타

x에 대한 부등식 $(x^2-2x)^2-2k(x^2-2x)-k+6\geq0$이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립할 때, k의 값의 범위를 구하시오.

$t=x^2-2x$라 두면 $x^2-2x=(x-1)^2-1\geq-1$이므로 t의 값의 범위는 $t\geq-1$이다. $f(t)=t^2-2kt-k+6$라 두면 $t\geq-1$에서 $f(t)\geq0$이 항상 성립해야 하므로 $t\geq-1$에서 이차함수 $f(t)$의 최솟값이 0보다 크거나 같아야 한다.

$$f(t)=(t-k)^2-k^2-k+6$$

이고 꼭짓점의 t좌표는 $t=k$이므로

(i) $k<-1$이면 함수 $f(t)$의 최솟값은 $t=-1$일 때, $f(-1)=k+7$이고

$$k+7\geq0 \quad \Rightarrow \quad k\geq-7$$

이다. 따라서 $k<-1$과의 공통범위는 $-7\leq k<-1$이다.

(ii) $k\geq-1$이면 함수 $f(t)$의 최솟값은 $t=k$일 때, $f(k)=-k^2-k+6$이고

$$-k^2-k+6\geq0 \quad \Rightarrow \quad (k-2)(k+3)\leq0$$

에서 $-3\leq k\leq2$이다. 따라서 $k\geq-1$과의 공통범위는 $-1\leq k\leq2$이다.

(i), (ii)에서 구하는 실수 k의 값의 범위는 $-7\leq k\leq2$이다.

답 $-7\leq k\leq2$

320

x에 대한 세 이차부등식

$$ax^2+2bx+c\geq0, \quad bx^2+2cx+a\geq0, \quad cx^2+2ax+b\geq0$$

이 x의 값에 관계없이 항상 성립할 때, x에 대한 이차부등식 $ax^2+2bx-3c\leq0$의 해를 구하시오. (단, a, b, c는 실수이다.)

$f(x)=ax^2+2bx+c$, $g(x)=bx^2+2cx+a$, $h(x)=cx^2+2ax+b$라 하자. 세 이차부등식 $f(x)\geq0$, $g(x)\geq0$, $h(x)\geq0$이 x의 값에 관계없이 항상 성립하려면 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나거나 만나지 않아야 한다. 따라서 $a>0$, $b>0$, $c>0$이고, 세 이차방정식 $f(x)=0$, $g(x)=0$, $h(x)=0$의 판별식을 각각 D_1, D_2, D_3이라 하면

$$\frac{D_1}{4}=b^2-ac\leq0, \quad \frac{D_2}{4}=c^2-ab\leq0, \quad \frac{D_3}{4}=a^2-bc\leq0$$

이 성립한다. $\frac{D_1}{4}+\frac{D_2}{4}+\frac{D_3}{4}$을 하면

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\leq0$$

에서 $a=b=c$이다. x에 대한 이차부등식 $ax^2+2bx-3c\leq0$에 이를 대입하면

$$ax^2+2ax-3a=a(x-1)(x+3)\leq0 \quad \Rightarrow \quad (x-1)(x+3)\leq0$$

이므로 구하는 이차부등식의 해는 $-3\leq x\leq1$이다.

답 $-3\leq x\leq1$

서 술 형

• 풀이 과정에 점수가 부여되니 풀이 과정 및 정답을 상세하게 서술하세요.

321

$-1 \le x \le 3$에서 x에 대한 이차부등식 $x^2-2kx+4k+5>0$이 항상 성립할 때, 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

$f(x)=x^2-2kx+4k+5$라 두면

$$f(x)=x^2-2kx+4k+5=(x-k)^2-k^2+4k+5$$

이다. [10%]

$-1 \le x \le 3$에서 주어진 부등식이 항상 성립하므로 $f(x)$의 최솟값이 0보다 크다. [20%]

(i) $k<-1$일 때, $f(x)$는 $x=-1$에서 최솟값 $6k+6$을 가진다.

$$6k+6>0 \quad \Rightarrow \quad k>-1$$

$k<-1$과의 공통범위는 없다.

(ii) $-1 \le k \le 3$일 때, $f(x)$는 $x=k$에서 최솟값 $-k^2+4k+5$를 가진다.

$$-k^2+4k+5>0 \quad \Rightarrow \quad (k+1)(k-5)<0$$

이므로 $-1<k<5$이고 $-1 \le k \le 3$과의 공통범위는 $-1<k \le 3$이다.

(iii) $k>3$일 때, $f(x)$는 $x=3$에서 최솟값 $-2k+14$를 가진다.

$$-2k+14>0 \quad \Rightarrow \quad k<7$$

$k>3$과의 공통범위는 $3<k<7$이다. [60%]

(i), (ii), (iii)에서 구하는 실수 k의 값의 범위는 $-1<k<7$이다. [10%]

답 $-1<k<7$

322

x에 대한 이차방정식 $x^2-(k-1)x+k+2=0$이 서로 다른 두 실근 α, β를 가지고 α, β 중 적어도 하나가 이차방정식 $x^2-x-2=0$의 두 실근 사이에 있을 때, 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

$f(x)=x^2-(k-1)x+k+2$라 하자. $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$이므로 이차방정식 $x^2-x-2=0$의 해는 $x=-1$ 또는 $x=2$이다. 따라서 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근 α, β 중에서 적어도 하나는 -1과 2 사이에 있다. [20%]

(i) α, β 중 하나만 -1과 2 사이에 있을 때,

$$f(-1)f(2)=(2k+2)(-k+8)<0 \quad \Rightarrow \quad (k+1)(k-8)>0$$

이므로 $k<-1$ 또는 $k>8$이다. [30%]

(ii) α, β가 모두 -1과 2 사이에 있을 때,

i) 이차방정식 $x^2-(k-1)x+k+2=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=(k-1)^2-4(k+2)=(k+1)(k-7)>0 \quad \Rightarrow \quad k<-1 \text{ 또는 } k>7$$

ii) 이차함수 $f(x)$의 축의 방정식이 $x=\frac{k-1}{2}$이므로

$$-1<\frac{k-1}{2}<2 \quad \Rightarrow \quad -1<k<5$$

iii) $f(-1)=2k+2>0 \quad \Rightarrow \quad k>-1$

iv) $f(2)=-k+8>0 \quad \Rightarrow \quad k<8$

i)~iv)에서 α, β가 -1과 2 사이에 있게 되는 k의 값은 없다. [40%]

(i), (ii)에서 의하여 실수 k의 값의 범위는 $k<-1$ 또는 $k>8$이다. [10%]

답 $k<-1$ 또는 $k>8$

323 단계형

x에 대한 이차방정식

$$(k^2-4k+5)x^2-2(a+k)^2x+k^2+b=0$$

이 실수 k의 값에 관계없이 항상 $x=1$을 근으로 가진다. 이 때, 다음 물음에 답하시오. (단, a, b는 상수이다.)

(1) a, b의 값을 각각 구하시오.

(2) 방정식의 나머지 한 근을 α라 할 때, α를 k에 대하여 나타내시오.

(3) α의 값의 범위를 구하시오.

(1) 주어진 방정식에 $x=1$을 대입하면

$$(k^2-4k+5)-2(a+k)^2+k^2+b=0$$

$$\Rightarrow \quad -4(1+a)k+(5-2a^2+b)=0$$

이 실수 k의 값에 상관없이 성립하므로 $1+a=0$, $5-2a^2+b=0$에서 $a=-1$, $b=-3$이다.

(2) $a=-1$, $b=-3$을 대입하면

$$(k^2-4k+5)x^2-2(k-1)^2x+k^2-3=0$$

$$\Rightarrow \quad (x-1)\{(k^2-4k+5)x-(k^2-3)\}=0$$

이므로 $x=1$ 또는 $(k^2-4k+5)x=k^2-3$이다. k에 대한 이차방정식 $k^2-4k+5=0$의 판별식을 D라 할 때, $\frac{D}{4}=2^2-5=-1<0$이므로 모든 실수 k에 대하여 $k^2-4k+5>0$이다. 따라서 방정식의 나머지 한 근은

$$\alpha=\frac{k^2-3}{k^2-4k+5}$$

이다.

(3) $\alpha=\frac{k^2-3}{k^2-4k+5}$이고, 실수 k의 값에 따라 α의 값이 정해진다. 따라서

$$(\alpha-1)k^2-4\alpha k+5\alpha+3=0$$

을 만족하는 실수 k의 값이 존재해야 한다. 즉, k에 대한 방정식의 실근이 존재해야 한다.

(i) $\alpha=1$일 때, $k=2$이다.

(ii) $\alpha \ne 1$일 때, k에 대한 이차방정식 $(\alpha-1)k^2-4\alpha k+5\alpha+3=0$이 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=4\alpha^2-(\alpha-1)(5\alpha+3)=-\alpha^2+2\alpha+3$$

$$=-(\alpha+1)(\alpha-3) \ge 0 \quad \Rightarrow \quad -1 \le \alpha \le 3$$

이므로 $-1 \le \alpha < 1$, $1<\alpha \le 3$이다.

(i), (ii)에서 구하는 α의 값의 범위는 $-1 \le \alpha \le 3$이다.

답 (1) $a=-1$, $b=-3$ (2) $\alpha=\frac{k^2-3}{k^2-4k+5}$ (3) $-1 \le \alpha \le 3$

10 평면좌표

01 두 점 사이의 거리

1. **수직선** 위의 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$ 사이의 **거리**는

$$\overline{AB}=|x_2-x_1|$$

2. **좌표평면** 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 **거리**는

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

02 선분을 내분하는 점과 외분하는 점

1. **수직선** 위의 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$에 대하여

(1) 선분 AB를 $m:n$ $(m>0, n>0)$으로 **내분하는 점** P의 좌표는

$$P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}\right)$$

(2) 선분 AB의 **중점** M의 좌표는

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

(3) 선분 AB를 $m:n$ $(m>0, n>0, m\neq n)$으로 **외분하는 점** Q의 좌표는

$$Q\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}\right)$$

2. **좌표평면** 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$에 대하여

(1) 선분 AB를 $m:n$ $(m>0, n>0)$으로 **내분하는 점** P의 좌표는

$$P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$

(2) 선분 AB의 **중점** M의 좌표는

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

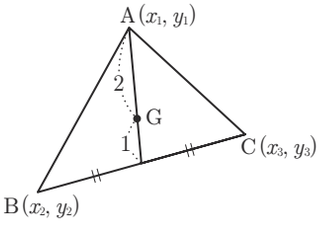
(3) 선분 AB를 $m:n$ $(m>0, n>0, m\neq n)$으로 **외분하는 점** Q의 좌표는

$$Q\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$$

03 삼각형의 무게중심

좌표평면 위의 세 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 **무게중심** G의 좌표는

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$



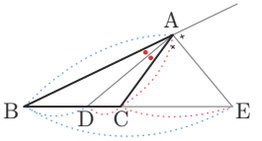
마·타·노·트

▶ 중선정리

삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 M이라 하면 다음이 성립한다.

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$$

▶ 각의 이등분선



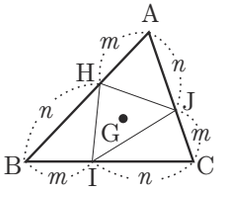
삼각형 ABC에서 각 A의 이등분선이 선분 BC와 만나는 점을 D, 각 A의 외각의 이등분선이 선분 BC의 연장선과 만나는 점을 E라 하면

1. $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$
2. $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BE}:\overline{CE}$

이 성립한다.

▶ 무게중심과 내분

삼각형 ABC의 세 변을 각각 $m:n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점들을 연결하여 만든 삼각형 HIJ의 무게중심은 삼각형 ABC의 무게중심과 같다.



324 2012학년도 11월 교육청

개념 04

좌표평면 위의 세 점 O(0, 0), A(3, 0), B(0, 6)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB의 내부에 점 P가 있다. 이때, $\overline{OP}^2+\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 최솟값은?

① 18 ② 21 ③ 24
④ 27 ⑤ 30

점 P의 좌표를 (x, y)로 놓으면

$$\overline{OP}^2+\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=(x^2+y^2)+\{(x-3)^2+y^2\}+\{x^2+(y-6)^2\}$$
$$=3x^2-6x+3y^2-12y+45$$
$$=3(x-1)^2+3(y-2)^2+30$$

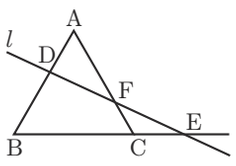
이다. 따라서 $x=1$, $y=2$일 때, 최솟값은 30이다.

답 ⑤

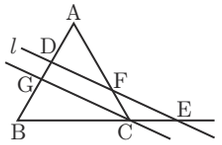
325 2012학년도 11월 교육청

개념 06

그림과 같이 △ABC에서 선분 AB를 2:3으로 내분하는 점을 D, 선분 BC를 5:2로 외분하는 점을 E라 하고, 두 점 D와 E를 지나는 직선 l과 선분 AC가 만나는 점을 F라 하자. 다음은 $\overline{AF}:\overline{FC}=m:n$일 때, mn의 값을 구하는 과정의 일부이다. (단, m, n은 서로소인 자연수이다.)



그림과 같이 점 C를 지나고 직선 l과 평행한 직선이 선분 AB와 만나는 점을 G라 하자. △ADF와 △AGC는 서로 닮은 도형이므로



$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FC}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{DG}} \quad \cdots ㉠$$

△BCG와 △BED는 서로 닮은 도형이므로

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{DG}} \quad \cdots ㉡$$

㉠과 ㉡으로부터

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}\cdot\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}\cdot\frac{\overline{FC}}{\overline{AF}}=\boxed{\text{(가)}} \quad \cdots ㉢$$

한편, $\overline{AD}:\overline{BD}=2:3$, $\overline{BE}:\overline{EC}=5:2$, $\overline{AF}:\overline{FC}=m:n$이므로 ㉢으로부터

$$\frac{m}{n}=\boxed{\text{(나)}}$$

따라서 $mn=\boxed{\text{(다)}}$이다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b, c라 할 때, $a+bc$의 값을 구하시오.

(가) $\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}\cdot\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}\cdot\frac{\overline{FC}}{\overline{AF}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}\cdot\frac{\overline{BD}}{\overline{DG}}\cdot\frac{\overline{DG}}{\overline{AD}}=1$

(나) $\frac{2}{3}\times\frac{5}{2}\times\frac{n}{m}=1$에서 $\frac{m}{n}=\frac{5}{3}$

(다) $mn=15$

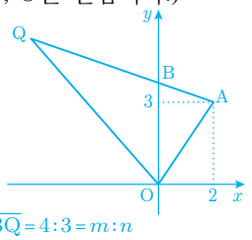
(가), (나), (다)에 들어가는 값은 각각 1, $\frac{5}{3}$, 15이다. 따라서 구하는 값은 $a+bc=1+\frac{5}{3}\cdot 15=26$이다.

답 26

326 2015학년도 11월 교육청

개념 06, 07

좌표평면 위의 두 점 A(2, 3), B(0, 4)에 대하여 선분 AB를 $m:n\ (m>n>0)$으로 외분하는 점을 Q라 하자. 삼각형 OAQ의 넓이가 16일 때, $\frac{n}{m}$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)



삼각형 OAQ의 넓이가 16, 삼각형 OAB의 넓이는 4이므로 삼각형 OBQ의 넓이는 12이다. 삼각형 OAB와 삼각형 OBQ는 각각 선분 AB와 선분 BQ를 밑변으로 할 때 높이가 같으므로 두 삼각형의 밑변의 길이의 비와 같다. 따라서

$$\overline{AB}:\overline{BQ}=4:12=1:3 \Rightarrow \overline{AQ}:\overline{BQ}=4:3=m:n$$

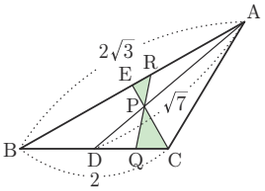
이므로 $\frac{n}{m}=\frac{3}{4}$이다.

답 $\frac{3}{4}$

327 2017학년도 09월 교육청

개념 07

$\overline{AB}=2\sqrt{3}$, $\overline{BC}=2$인 삼각형 ABC에서 선분 BC의 중점을 D라 할 때, $\overline{AD}=\sqrt{7}$이다. 각 ACB의 이등분선이 선분 AB와 만나는 점을 E, 선분 CE와 선분 AD가 만나는 점을 P, 각 APE의 이등분선이 선분 AB와 만나는 점을 R, 선분 PR의 연장선이 선분 BC와 만나는 점을 Q라 하자. 삼각형 PRE의 넓이를 S_1, 삼각형 PQC의 넓이를 S_2라 할 때, $\frac{S_2}{S_1}$의 값을 구하시오.



D(0, 0), B(−1, 0), C(1, 0), A(a, b)로 놓으면 $\overline{AB}=2\sqrt{3}$, $\overline{AD}=\sqrt{7}$이므로

$$(a+1)^2+b^2=(2\sqrt{3})^2,\quad a^2+b^2=(\sqrt{7})^2$$

이다. 이 두 식을 연립하여 풀면 점 A의 좌표는 $(2, \sqrt{3})$이다. 또한 $\overline{AC}=2$이므로 삼각형 ABC는 이등변삼각형이다. 이등변삼각형의 성질에 의하여 선분 CE는 선분 AB의 수직이등분선이다. 따라서 $\overline{CE}=1$이고 점 P는 삼각형 ABC의 무게중심이다. 삼각형의 무게중심의 성질에 의하여 $\overline{AP}:\overline{PD}=2:1$이므로 $\overline{AP}=\frac{2\sqrt{7}}{3}$, $\overline{PD}=\frac{\sqrt{7}}{3}$이고, $\overline{CP}:\overline{PE}=2:1$이므로 $\overline{CP}=\frac{2}{3}$, $\overline{PE}=\frac{1}{3}$이다. 삼각형 EPA에서 선분 PR가 각 APE의 이등분선이므로 각의 이등분선의 성질에 의하여

$$\overline{PA}:\overline{PE}=\overline{AR}:\overline{ER}=2\sqrt{7}:1$$

이다. 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면 삼각형 EPA의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이의 $\frac{1}{6}$이므로

$$S_1=S\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{2\sqrt{7}+1}$$

이다. 같은 방법으로 삼각형 CPD에서 $\overline{PD}:\overline{PC}=\overline{DQ}:\overline{CQ}=\sqrt{7}:2$이다. 삼각형 CPD의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이의 $\frac{1}{6}$이므로

$$S_2=S\times\frac{1}{6}\times\frac{2}{\sqrt{7}+2}$$

이다. 따라서 $\frac{S_2}{S_1}=8-2\sqrt{7}$이다.

답 $8-2\sqrt{7}$

개념치료

개념

01. 두 점 사이의 거리

328 중요

두 점 A$(2, k)$, B$(k+2, 4)$ 사이의 거리가 $2\sqrt{2}$ 이하가 되도록 하는 정수 k의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

$\overline{AB} \le 2\sqrt{2}$에서 $\overline{AB}^2 \le 8$이다.

$$\overline{AB}^2 = (k+2-2)^2 + (4-k)^2 = 2k^2 - 8k + 16$$

이므로 k에 대한 이차부등식 $2k^2 - 8k + 16 - 8 \le 0$을 풀면

$$2(k-2)^2 \le 0 \quad \Rightarrow \quad k = 2$$

이다. 따라서 조건을 만족하는 정수 k의 개수는 1이다.

답 ①

329

세 점 A$(-3, -2)$, B$(1, 6)$, C$(4, 3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 외심을 점 P라 할 때, 점 P의 좌표를 구하시오.

삼각형의 외심은 각 꼭짓점까지 이르는 거리가 같은 점이다. 따라서 점 P에 대하여

$$\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{CP} \quad \Rightarrow \quad \overline{AP}^2 = \overline{BP}^2 = \overline{CP}^2$$

이 성립한다. 즉, P(x, y)로 놓으면

$$\overline{AP}^2 = (x+3)^2 + (y+2)^2$$
$$\overline{BP}^2 = (x-1)^2 + (y-6)^2$$
$$\overline{CP}^2 = (x-4)^2 + (y-3)^2$$

이다. $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$에서

$$x + 2y = 3 \qquad \cdots ㉠$$

이고, $\overline{AP}^2 = \overline{CP}^2$에서

$$7x + 5y = 6 \qquad \cdots ㉡$$

이다. ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x = -\frac{1}{3}$, $y = \frac{5}{3}$이므로 점 P의 좌표는 $\left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$

답 P$\left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$

330

두 점 A$(1, 4)$, B$(5, 2)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점을 C라 하고, y축 위의 점을 D라 하자. 선분 CD의 길이는?

① $\frac{\sqrt{5}}{4}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ③ $\sqrt{5}$
④ $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ ⑤ $2\sqrt{5}$

C$(c, 0)$, D$(0, d)$로 놓으면 $\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$에서

$$(c-1)^2 + (0-4)^2 = (c-5)^2 + (0-2)^2 \quad \Rightarrow \quad 2c = 3$$

이므로 $c = \frac{3}{2}$이다. 또한 $\overline{AD}^2 = \overline{BD}^2$에서

$$(0-1)^2 + (d-4)^2 = (0-5)^2 + (d-2)^2 \quad \Rightarrow \quad d = -3$$

이므로 $d = -3$이다. 따라서 두 점 C$\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, D$(0, -3)$을 잇는 선분 CD의 길이는 다음과 같다.

$$\overline{CD} = \sqrt{\left(0 - \frac{3}{2}\right)^2 + (-3-0)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

답 ④

개념

02. 세 변의 길이와 삼각형

331 중요

세 점 A$(2, 1)$, B$(-1, 2)$, C$(3, 4)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인지 구하시오.

삼각형 ABC의 각 변의 길이를 구하면

$$\overline{AB} = \sqrt{(-1-2)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{10}$$
$$\overline{BC} = \sqrt{(3+1)^2 + (4-2)^2} = 2\sqrt{5}$$
$$\overline{CA} = \sqrt{(2-3)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{10}$$

이다. $\overline{AB} = \overline{CA}$이고, $\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{BC}^2$이므로 삼각형 ABC는 $\angle A = 90°$인 직각이등변삼각형이다.

답 $\angle A = 90°$인 직각이등변삼각형

332

두 점 A$(2, 4)$, B$(5, 1)$과 y축 위의 점 C를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 $\overline{AC} = \overline{BC}$인 이등변삼각형일 때, 점 C의 좌표를 구하시오.

점 C$(0, c)$로 놓고 선분 AC, BC의 길이를 각각 구하면

$$\overline{AC} = \sqrt{(0-2)^2 + (c-4)^2} = \sqrt{c^2 - 8c + 20}$$
$$\overline{BC} = \sqrt{(0-5)^2 + (c-1)^2} = \sqrt{c^2 - 2c + 26}$$

이다. $\overline{AC} = \overline{BC}$에서

$$\sqrt{c^2 - 8c + 20} = \sqrt{c^2 - 2c + 26}$$

이므로 양변을 제곱하여 정리하면 $6c = -6$이다. 즉, $c = -1$이다. 따라서 구하는 점 C의 좌표는 $(0, -1)$이다.

답 C$(0, -1)$

333

세 점 A(a, a), B$(3, b)$, C$(5, a)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오. (단, 삼각형의 세 꼭짓점은 모두 제1사분면 위에 있다.)

삼각형 ABC의 세 꼭짓점은 모두 제1사분면 위에 있으므로 $a > 0$, $b > 0$이고,

$$\overline{AB} = \sqrt{(3-a)^2 + (b-a)^2} \qquad \cdots ㉠$$
$$\overline{BC} = \sqrt{(5-3)^2 + (a-b)^2} \qquad \cdots ㉡$$
$$\overline{CA} = \sqrt{(a-5)^2 + (a-a)^2} \qquad \cdots ㉢$$

이다. 삼각형 ABC가 정삼각형이므로 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$이다. ㉠=㉡에서

$$\sqrt{(3-a)^2 + (b-a)^2} = \sqrt{4 + (a-b)^2} \quad \Rightarrow \quad a^2 - 6a + 5 = (a-1)(a-5) = 0$$

이므로 $a = 1$ 또는 $a = 5$이다. 또한, ㉡=㉢에서

$$\sqrt{4 + (a-b)^2} = \sqrt{(a-5)^2} \quad \Rightarrow \quad b^2 - 2ab = -10a + 21 \qquad \cdots ㉣$$

(i) $a = 1$일 때, ㉣에 $a = 1$을 대입하면 $b^2 - 2b - 11 = 0 \Rightarrow b = 1 \pm 2\sqrt{3}$에서 $b > 0$이므로 $b = 1 + 2\sqrt{3}$이다.

(ii) $a = 5$일 때, ㉣에 $a = 5$를 대입하면 $b^2 - 10b + 29 = 0$에서 b에 대한 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4} = 5^2 - 29 = -4 < 0$이므로 b는 실근을 가지지 않는다.

(i), (ii)에서 $a = 1$, $b = 1 + 2\sqrt{3}$이다. 이를 ㉠에 대입하면 정삼각형 ABC의 한 변의 길이는 4이므로 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 = 4\sqrt{3}$이다.

답 $4\sqrt{3}$

개념

03. 선분의 길이의 합의 최솟값

334

직선 $y=x+1$ 위의 점 P와 두 점 A(1, 4), B(5, 0)에 대하여 $\overline{AP}+\overline{BP}$가 최소가 되는 점 P의 좌표를 구하시오.

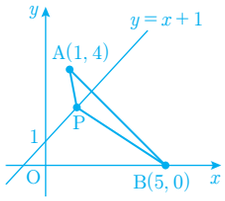
$\overline{AP}+\overline{BP}\geq\overline{AB}$이므로 $\overline{AP}+\overline{BP}$가 최소가 되는 점 P는 선분 AB와 직선 $y=x+1$의 교점이다. 직선 AB의 방정식을 구하면

$$y=\frac{0-4}{5-1}(x-5) \quad\Rightarrow\quad y=-x+5$$

이다. 직선 $y=-x+5$와 직선 $y=x+1$을 연립하여 풀면

$$-x+5=x+1 \quad\Rightarrow\quad x=2$$

이다. 또한, $x=2$일 때, $y=3$이므로 점 P의 좌표는 (2, 3)이다.



답 P(2, 3)

335

실수 x, y에 대하여

$$\sqrt{(x+4)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-5)^2+(y+2)^2}$$

의 최솟값을 구하시오.

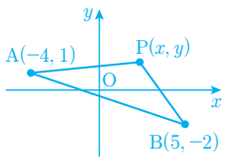
A(−4, 1), B(5, −2), P(x, y)로 놓으면

$$\sqrt{(x+4)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-5)^2+(y+2)^2}$$
$$=\overline{AP}+\overline{PB}\geq\overline{AB}$$

이다. 이때,

$$\overline{AB}=\sqrt{(5+4)^2+(-2-1)^2}=3\sqrt{10}$$

이고, 등호는 점 P가 선분 AB 위의 점일 때 성립한다. 따라서 구하는 식의 최솟값은 $3\sqrt{10}$이다.



답 $3\sqrt{10}$

336 중요

실수 a에 대하여

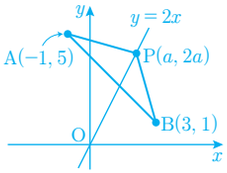
$$\sqrt{(a+1)^2+(2a-5)^2}+\sqrt{(a-3)^2+(2a-1)^2}$$

이 최소가 되는 a의 값을 구하시오.

P$(a, 2a)$, A(−1, 5), B(3, 1)로 놓으면 주어진 식은 $\overline{AP}+\overline{BP}$와 같다. 이때, 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 선분 AB의 길이이고, 점 P$(a, 2a)$는 직선 $y=2x$ 위의 점이다. 따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$이 최소가 되는 점 P는 선분 AB와 $y=2x$의 교점이다. 직선 AB의 방정식은

$$y=\frac{1-5}{3-(-1)}(x+1)+5 \quad\Rightarrow\quad y=-x+4$$

이고 직선 $y=2x$의 교점의 좌표는 $\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$이므로 주어진 식이 최소가 되는 a의 값은 $\frac{4}{3}$이다.



답 $\frac{4}{3}$

개념

04. 선분의 길이의 제곱의 합의 최솟값

337 중요

두 점 A(3, 4), B(5, 8)과 임의의 점 P에 대하여 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 값이 최소일 때, 점 P의 좌표는?

① (−4, −2) ② (−2, 0) ③ (0, 2)
④ (2, 4) ⑤ (4, 6)

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=\{(x-3)^2+(y-4)^2\}+\{(x-5)^2+(y-8)^2\}$$
$$=2x^2-16x+2y^2-24y+114$$
$$=2(x-4)^2+2(y-6)^2+10$$

이다. $(x-4)^2\geq0$, $(y-6)^2\geq0$이므로 $x=4$, $y=6$일 때, 주어진 식은 최솟값을 가지고 그때의 점 P의 좌표는 (4, 6)이다.

답 ⑤

338

두 점 A(2, 0), B(4, 6)과 직선 $y=-x$ 위의 한 점 C에 대하여 $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$의 최솟값을 구하시오.

직선 $y=-x$ 위의 점 C의 좌표를 $(a, -a)$라 하면

$$\overline{AC}^2=(a-2)^2+(-a-0)^2=2a^2-4a+4$$
$$\overline{BC}^2=(a-4)^2+(-a-6)^2=2a^2+4a+52$$

이므로

$$\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=4a^2+56 \qquad \cdots\ ㉠$$

이다. ㉠은 a에 대한 이차함수이므로 $a=0$일 때, 최솟값이 56이다. 따라서 구하는 최솟값은 56이다.

답 56

339

세 점 O(0, 0), A(3, 6), B(6, 9)와 좌표평면 위의 한 점 P에 대하여 $\overline{OP}^2+\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 값이 최소일 때, 점 P의 좌표와 그때의 최솟값을 각각 구하시오.

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$$\overline{OP}^2+\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$$
$$=(x^2+y^2)+\{(x-3)^2+(y-6)^2\}+\{(x-6)^2+(y-9)^2\}$$
$$=3x^2-18x+3y^2-30y+162$$
$$=3(x-3)^2+3(y-5)^2+60$$

이다. $(x-3)^2\geq0$, $(y-5)^2\geq0$이므로 $x=3$, $y=5$일 때, 주어진 식은 최솟값을 가진다. 따라서 점 P의 좌표는 (3, 5)이고 최솟값은 60이다.

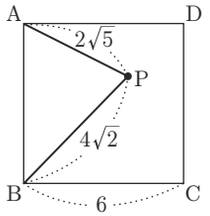
답 P(3, 5), 최솟값: 60

개념

05. 좌표를 이용한 도형의 성질

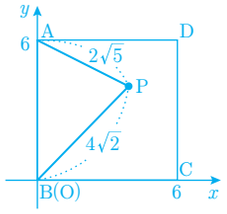
340

오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정사각형 ABCD의 내부의 점 P에 대하여 $\overline{AP}=2\sqrt{5}$, $\overline{BP}=4\sqrt{2}$일 때, 선분 DP의 길이는?



① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$
④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

선분 BC가 x축, 선분 AB가 y축 위에 있도록 사각형 ABCD를 좌표평면 위에 놓고, 점 P의 좌표를 (x, y) (단, $x>0$, $y>0$)이라 하면



$$\overline{AP}^2=x^2+(y-6)^2=20 \quad \cdots ㉠$$

$$\overline{BP}^2=x^2+y^2=32 \quad \cdots ㉡$$

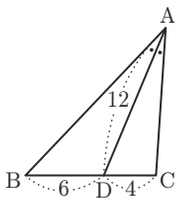
이다. ㉠−㉡에서 $-12y+48=0$이므로 $y=4$이다. $y=4$를 ㉡에 대입하면 $x>0$이므로 $x=4$이다. 즉, P(4, 4)이고 D(6, 6)이므로 선분 DP의 길이는

$$\overline{DP}=\sqrt{(4-6)^2+(4-6)^2}=2\sqrt{2}$$

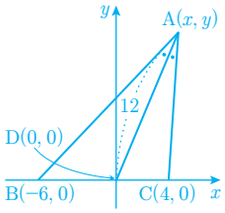
답 ③

341 중요

오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC에서 각 A의 이등분선이 선분 BC와 만나는 점이 D일 때, $\overline{AD}=12$, $\overline{BD}=6$, $\overline{DC}=4$이다. 선분 AC의 길이를 구하시오.



점 D가 원점이 되고 선분 BC가 x축 위에 오도록 삼각형 ABC를 좌표평면 위에 놓으면 오른쪽 그림과 같다. 점 A의 좌표를 (x, y) (단, $x>0$, $y>0$)이라 하면



$\overline{AD}=12 \Rightarrow x^2+y^2=144 \quad \cdots ㉠$

이다. 직선 AD는 각 A의 이등분선이므로 $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}=3:2$에서

$2\overline{AB}=3\overline{AC} \Rightarrow 4\overline{AB}^2=9\overline{AC}^2$

이다. $\overline{AB}=\sqrt{(-6-x)^2+y^2}$, $\overline{AC}=\sqrt{(4-x)^2+y^2}$이므로

$4\{(-6-x)^2+y^2\}=9\{(4-x)^2+y^2\} \Rightarrow x^2+y^2-24x=0 \quad \cdots ㉡$

㉠을 ㉡에 대입하면

$144-24x=0 \Rightarrow x=6$

이고 $x=6$을 ㉠에 대입하면 $y>0$이므로 $y=6\sqrt{3}$이다. 따라서 점 A의 좌표는 $(6, 6\sqrt{3})$이고 구하는 선분 AC의 길이는

$$\overline{AC}=\sqrt{2^2+(6\sqrt{3})^2}=4\sqrt{7}$$

답 $4\sqrt{7}$

개념

06. 선분을 내분하는 점과 외분하는 점

342

두 점 A(2, −3), B에 대하여 선분 AB를 3:4로 내분하는 점이 원점일 때, 점 B의 좌표를 구하시오.

점 B의 좌표를 (a, b)로 놓고, 선분 AB를 3:4로 내분하는 점의 좌표가 (0, 0)이므로

$$0=\frac{3\cdot a+4\cdot 2}{3+4}, \quad 0=\frac{3\cdot b+4\cdot(-3)}{3+4}$$

이다. $3a+8=0$, $3b-12=0$에서 $a=-\frac{8}{3}$, $b=4$이므로 점 B의 좌표는 $\left(-\frac{8}{3}, 4\right)$이다.

답 $\mathrm{B}\left(-\frac{8}{3}, 4\right)$

343 중요

두 점 A(−3, 2), B(3, 4)를 이은 선분 AB의 연장선 위의 점 C에 대하여 $\overline{AC}=3\overline{BC}$일 때, 선분 BC의 중점의 좌표를 구하시오.

$\overline{AC}=3\overline{BC}$에서 $\overline{AC}:\overline{BC}=3:1$이므로 점 C는 선분 AB를 3:1로 외분하는 점이다. 점 $C(x, y)$로 놓으면

$$x=\frac{3\cdot 3-1\cdot(-3)}{3-1}=6, \quad y=\frac{3\cdot 4-1\cdot 2}{3-1}=5$$

이다. 즉, 점 C의 좌표는 (6, 5)이다. 따라서 선분 BC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{3+6}{2}, \frac{4+5}{2}\right)$에서 $\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right)$이다.

답 $\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right)$

344

두 점 A(2, 9), B(6, −1)에 대하여 선분 AB를 k:1로 내분하는 점이 제1사분면 위에 있을 때, 모든 자연수 k의 값의 합은?

① 15 ② 21 ③ 28
④ 36 ⑤ 45

선분 AB를 k:1로 내분하는 점을 $P(x, y)$라 하면

$$x=\frac{k\cdot 6+1\cdot 2}{k+1}, \quad y=\frac{k\cdot(-1)+1\cdot 9}{k+1}$$

이다. 점 P가 제1사분면 위에 있으므로 $x>0$, $y>0$이다. 따라서

$$\frac{6k+2}{k+1}>0, \quad \frac{9-k}{k+1}>0$$

인데, k는 자연수이므로 $k+1>0$이고 $k>-\frac{1}{3}$, $k<9$이다. 즉, $-\frac{1}{3}<k<9$를 만족하는 자연수 k의 값은 1, 2, …, 8이다. 따라서 모든 자연수 k의 값의 합은

$1+2+3+4+5+6+7+8=36$

답 ④

개념

07. 선분을 내분하는 점, 외분하는 점의 응용

345

두 점 A(1, −2), B(6, −3)을 잇는 선분 AB를 $m:2$로 외분하는 점이 직선 $y=x+3$ 위에 있을 때, 실수 m의 값을 구하시오.

선분 AB를 $m:2$로 외분하는 점은

$$\left(\frac{m\cdot 6-2\cdot 1}{m-2},\ \frac{m\cdot(-3)-2\cdot(-2)}{m-2}\right) \Rightarrow \left(\frac{6m-2}{m-2},\ \frac{-3m+4}{m-2}\right)$$

이다. 이 점이 직선 $y=x+3$ 위에 있으므로

$$\frac{-3m+4}{m-2}=\frac{6m-2}{m-2}+3$$

을 만족한다. 양변에 $m-2$를 곱하면 $-3m+4=6m-2+3(m-2)$이므로 $m=1$이다.

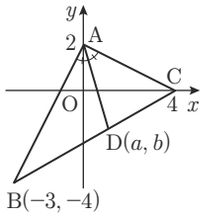
답 1

346 중요

오른쪽 그림과 같이 세 점

$$A(0, 2),\ B(-3, -4),\ C(4, 0)$$

을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC에서 각 A의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 $D(a, b)$라 할 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.



선분 AD가 각 A를 이등분하므로 $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{DC}$를 만족한다.

$$\overline{AB}=\sqrt{(-3-0)^2+(-4-2)^2}=3\sqrt{5}$$

$$\overline{AC}=\sqrt{(4-0)^2+(0-2)^2}=2\sqrt{5}$$

에서 $\overline{AB}:\overline{AC}=3:2$이므로 $\overline{BD}:\overline{DC}=3:2$이다. 따라서 따라서 점 D는 선분 BC를 3:2로 내분하는 점이므로 점 D의 좌표는

$$a=\frac{3\cdot 4+2\cdot(-3)}{3+2},\quad b=\frac{3\cdot 0+2\cdot(-4)}{3+2}$$

에서 $a=\frac{6}{5}$, $b=-\frac{8}{5}$이므로 $a^2+b^2=\frac{36}{25}+\frac{64}{25}=4$이다.

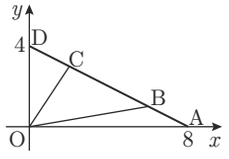
답 4

347

오른쪽 그림과 같은 두 점 A(8, 0), D(0, 4)를 이은 선분 AD 위의 두 점 B, C에 대하여 세 삼각형

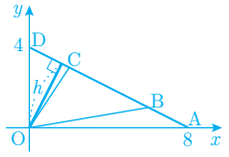
$$AOB,\ BOC,\ COD$$

의 넓이의 비가 1:2:1일 때, 점 C의 좌표를 구하시오.



원점과 원점에서 선분 AD에 내린 수선의 발 사이의 거리를 h라 하자. 오른쪽 그림과 같이 세 삼각형 AOB, BOC, COD의 높이가 모두 h로 같으므로

$$\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CD}=1:2:1$$



일 때, 세 삼각형 AOB, BOC, COD의 넓이의 비가 1:2:1이다. 따라서 점 C는 선분 AD를 3:1로 내분하는 점이므로 $C(x, y)$로 놓으면

$$x=\frac{3\cdot 0+1\cdot 8}{3+1}=2,\quad y=\frac{3\cdot 4+1\cdot 0}{3+1}=3$$

에서 C(2, 3)이다.

답 C(2, 3)

개념

08. 삼각형의 무게중심

348 중요

세 점 $A(a, -3)$, $B(-2, b)$, $C(-b, 8)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 (−2, 2)일 때, $a+3b$의 값은?

① −3 ② −1 ③ 0
④ 1 ⑤ 3

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 (−2, 2)이므로

$$-2=\frac{a-2-b}{3},\quad 2=\frac{-3+b+8}{3}$$

에서 $a-b=-4$, $b=1$이다. 즉, $a=-3$이다. 따라서 구하는 값은 $a+3b=-3+3\cdot 1=0$이다.

답 ③

349

삼각형 ABC에서 A(2, −3)이고 선분 BC의 중점을 M이라 하자. 선분 AM의 중점의 좌표가 (5, 0)일 때, 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표를 구하시오.

$M(a, b)$라 하면 선분 AM의 중점의 좌표가 (5, 0)이므로

$$\frac{2+a}{2}=5,\quad \frac{-3+b}{2}=0$$

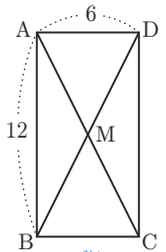
에서 $a=8$, $b=3$이므로 M(8, 3)이다. 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는 선분 AM을 2:1로 내분하는 점이므로

$$\left(\frac{2\cdot 8+1\cdot 2}{2+1},\ \frac{2\cdot 3+1\cdot(-3)}{2+1}\right) \Rightarrow (6, 1)$$

답 (6, 1)

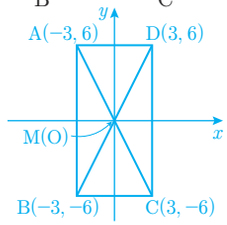
350

오른쪽 그림과 같은 직사각형 ABCD에서 $\overline{AB}=12$, $\overline{AD}=6$이고 두 대각선의 교점은 M이다. 삼각형 ABC의 무게중심을 G, 삼각형 CDM의 무게중심을 H라 할 때, 선분 GH의 길이를 구하시오.



점 M이 원점이 되도록 직사각형 ABCD를 좌표평면 위에 놓으면

$$A(-3, 6),\ B(-3, -6),\ C(3, -6),\ D(3, 6)$$



이다. 그러므로 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표를 (a, b)라 하면

$$a=\frac{-3-3+3}{3}=-1,\quad b=\frac{6-6-6}{3}=-2$$

에서 G(−1, −2)이다. 또한, 삼각형 CDM의 무게중심 H의 좌표를 (c, d)라 하면

$$c=\frac{3+3+0}{3}=2,\quad d=\frac{-6+6+0}{3}=0$$

에서 H(2, 0)이다. 따라서 구하는 값은 $\overline{GH}=\sqrt{(2+1)^2+(0+2)^2}=\sqrt{13}$이다.

답 $\sqrt{13}$

351 마타

네 실수 a, b, c, d에 대하여

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}+\sqrt{(4-c)^2+(3-d)^2}$$

의 최솟값을 구하시오.

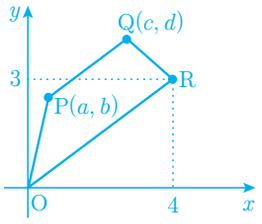
O(0, 0), P(a, b), Q(c, d), R(4, 3)으로 놓으면 주어진 식은

$$\overline{OP}+\overline{PQ}+\overline{QR}$$

라 할 수 있다. 두 점 P, Q가 선분 OR 위에 있으면 주어진 식은 최솟값을 가지고, 그 값은 선분 OR의 길이이므로

$$\overline{OR}=\sqrt{(4-0)^2+(3-0)^2}=5$$

에서 5이다.



답 5

352

x, y에 대한 방정식 $xy+2x+y-1=0$을 만족시키는 정수 x, y를 좌표평면 위의 점 (x, y)로 나타낼 때, 이 점들을 꼭짓점으로 하는 사각형은 어떤 사각형인지 구하시오.

방정식 $xy+2x+y-1=0$을 (다항식)×(다항식)=(정수)의 꼴로 바꾸면 $(x+1)(y+2)=3$이다. 이를 만족하는 정수 x, y를 표로 나타내면

$x+1$	-1	1	-3	3
$y+2$	-3	3	-1	1

$\Rightarrow$

x	-2	0	-4	2
y	-5	1	-3	-1

이므로 이를 만족시키는 점 (x, y)는 $(-2, -5)$, $(0, 1)$, $(-4, -3)$, $(2, -1)$이다. A(0, 1), B(2, −1), C(−2, −5), D(−4, −3)이라 하자. 이때 선분 AC, 선분 BD의 중점을 각각 구하면

선분 AC의 중점: $\left(\frac{0-2}{2}, \frac{1-5}{2}\right) \Rightarrow (-1, -2)$

선분 BD의 중점: $\left(\frac{2-4}{2}, \frac{-1-3}{2}\right) \Rightarrow (-1, -2)$

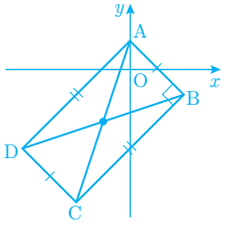
일치하므로 사각형 ABCD는 평행사변형이다.
또한, 사각형 ABCD의 각 변의 길이는

$\overline{AB}=\sqrt{(2-0)^2+(-1-1)^2}=2\sqrt{2}$

$\overline{BC}=\sqrt{(-2-2)^2+(-5+1)^2}=4\sqrt{2}$

$\overline{AC}=\sqrt{(-2-0)^2+(-5-1)^2}=2\sqrt{10}$

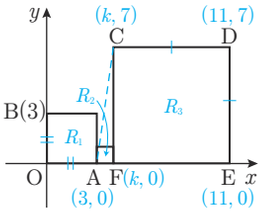
이므로 $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$이다. 따라서 사각형 ABCD는 각 B가 직각인 평행사변형, 즉 직사각형이다.



답 직사각형

353

오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 3개의 정사각형이 놓여있다. 두 점 B, D의 좌표가 각각 (0, 3), (11, 7)일 때, 선분 AC의 길이를 구하시오.

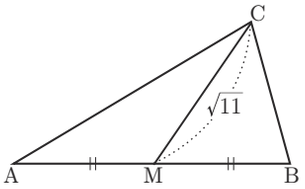


3개의 정사각형을 원점에 가까운 것부터 순서대로 R_1, R_2, R_3이라 하자. 정사각형 R_1에서 $\overline{OA}=\overline{OB}$이므로 A(3, 0)이다. 또한, 정사각형 R_3에서 D(11, 7)이므로 한 변의 길이가 7이다. 이때, 점 F(k, 0)으로 놓으면 $11-7=k=4$에서 F(4, 0)이고 C(4, 7)이다. 따라서 선분 AC의 길이는 $\overline{AC}=\sqrt{(4-3)^2+(7-0)^2}=5\sqrt{2}$

답 $5\sqrt{2}$

354 마타

그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}$이고 세 변의 길이의 곱이 72인 이등변삼각형 ABC가 있다. 선분 AB의 중점이 M일 때, $\overline{CM}=\sqrt{11}$이다. 세 변의 길이의 합을 구하시오. (단, $\overline{AM}>\overline{BC}$이다.)



$\overline{AM}=a$, $\overline{BC}=b$라 하면, $a>b>0$이고 $\overline{AB}=\overline{AC}=2a$이다.
세 변의 길이의 곱은

$$2a\cdot 2a\cdot b=4a^2b=72 \quad \cdots ㉠$$

이다. 점 M은 선분 AB의 중점이므로 중선정리를 이용하면 $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=2(\overline{CM}^2+\overline{AM}^2)$이므로

$$(2a)^2+b^2=2(11+a^2) \Rightarrow 2a^2+b^2=22 \quad \cdots ㉡$$

이다. ㉡에서 $2a^2=22-b^2$을 ㉠에 대입하면

$$2(22-b^2)b=72 \Rightarrow b^3-22b+36=0$$

이다. 인수정리를 이용하여 인수분해하면

$$(b-2)(b^2+2b-18)=0 \Rightarrow b=2 \text{ 또는 } b=-1+\sqrt{19} \ (\because b>0)$$

(i) $b=2$일 때, ㉠에 대입하면 $a^2=9$에서 $a>0$이므로 $a=3$이다.
(ii) $b=-1+\sqrt{19}$일 때,

$$4a^2(-1+\sqrt{19})=72 \Rightarrow a^2=1+\sqrt{19}$$

이다. 이때

$$b^2-a^2=(-1+\sqrt{19})^2-(1+\sqrt{19})=19-3\sqrt{19}=\sqrt{19}(\sqrt{19}-3)>0$$

에서 $a^2<b^2$인데 문제의 조건에서 $a^2>b^2$이므로 $b\neq -1+\sqrt{19}$이다.
(i), (ii)에 의하여 $a=3$, $b=2$이다. 따라서 $\overline{AB}=\overline{AC}=6$이고 $\overline{BC}=2$이므로 세 변의 길이의 합은 14이다.

답 14

서 술 형

• 풀이 과정에 점수가 부여되니 풀이 과정 및 정답을 상세하게 서술하세요.

355

점 A(4, 6)을 꼭짓점으로 하고 $\overline{AB}:\overline{AC}=2:1$인 삼각형 ABC에서 각 A의 이등분선이 선분 BC와 만나는 점을 D, 각 A의 외각의 이등분선이 선분 BC의 연장선과 만나는 점을 E라 할 때, D(0, 2)이고 E(16, −6)이다. $\overline{AB}+\overline{AC}$의 값을 구하시오.

내각의 이등분선의 성질에 의하여
$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{DC}$에서 $\overline{BD}:\overline{DC}=2:1$이므로

$$\overline{BD}=\frac{2}{3}\overline{BC},\ \overline{DC}=\frac{1}{3}\overline{BC}$$

이다. 또한 외각의 이등분선의 성질에 의하여
$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BE}:\overline{CE}$에서 $\overline{BE}:\overline{CE}=2:1$이므로

$$\overline{CE}=\overline{BC}$$

이다. 따라서 $\overline{BD}:\overline{DC}:\overline{CE}=2:1:3$이다. [20%]

그러므로 점 B는 선분 DE를 1:3으로 외분하는 점이고 점 B의 좌표는

$$\left(\frac{1\cdot16-3\cdot0}{1-3},\ \frac{1\cdot(-6)-3\cdot2}{1-3}\right)\ \Rightarrow\ (-8,\ 6)$$

이다. [30%]

또한 점 C는 선분 DE를 1:3으로 내분하는 점이므로 점 C의 좌표는

$$\left(\frac{1\cdot16+3\cdot0}{1+3},\ \frac{1\cdot(-6)+3\cdot2}{1+3}\right)\ \Rightarrow\ (4,\ 0)$$

이다. [30%]

B(−8, 6)이고 C(4, 0)이므로

$$\overline{AB}=\sqrt{(-8-4)^2+(6-6)^2}=12$$

$$\overline{AC}=\sqrt{(4-4)^2+(0-6)^2}=6$$

에서 $\overline{AB}+\overline{AC}=12+6=18$이다. [20%]

답 18

356

점 A(7, 1)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 외심이 점 P(2, 1)이고 무게중심이 점 $G\left(\frac{10}{3},\ \frac{2}{3}\right)$일 때, 꼭짓점 B, C의 좌표를 각각 구하시오. (단, 점 C는 제2사분면 위의 점이다.)

삼각형의 외심에서 꼭짓점에 이르는 거리는 같으므로 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$이다. . [15%]
$\overline{PA}=\sqrt{(7-2)^2+(1-1)^2}=5$이므로 [10%]
꼭짓점 B, C의 좌표를 각각 B(a, b), C(c, d)로 놓으면,

$$\overline{PB}=\sqrt{(a-2)^2+(b-1)^2}=5 \quad \cdots ㉠$$

$$\overline{PC}=\sqrt{(c-2)^2+(d-1)^2}=5 \quad \cdots ㉡$$

가 성립한다. [25%]

또한, 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $G\left(\frac{10}{3},\ \frac{2}{3}\right)$이므로

$$\frac{10}{3}=\frac{7+a+c}{3},\quad \frac{2}{3}=\frac{1+b+d}{3}$$

에서 $a+c=3$, $b+d=1$이다. [20%]
$a=3-c$, $b=1-d$를 ㉠에 대입하면

$$\sqrt{(3-c-2)^2+(1-d-1)^2}=5\ \Rightarrow\ \sqrt{(c-1)^2+d^2}=5 \quad \cdots ㉢$$

이다. ㉡=㉢이므로

$$(c-1)^2+d^2=(c-2)^2+(d-1)^2\ \Rightarrow\ c=2-d \quad \cdots ㉣$$

㉣을 ㉡에 대입하고 양변을 제곱하면

$$(-d)^2+(d-1)^2=25\ \Rightarrow\ d^2-d-12=(d+3)(d-4)=0$$

에서 $d>0$이므로 $d=4$이다. 따라서 $c=-2$, $a=5$, $b=-3$이고 구하는 두 점 B, C의 좌표는 각각 B(5, −3), C(−2, 4)이다. [30%]

답 B(5, −3), C(−2, 4)

357 단계형

둘레의 길이가 $6\sqrt{5}$인 평행사변형 ABCD의 꼭짓점의 좌표가 각각 A(0, 1), B(1, 3), C(k, 1)이다. 다음 물음에 답하시오.

(1) 상수 k의 값을 구하시오.

(2) 평행사변형 ABCD의 넓이를 구하시오.

(3) 평행사변형 ABCD의 넓이가 최대일 때, 점 D의 좌표를 구하시오.

(1) 평행사변형 ABCD의 둘레의 길이가 정해져 있으므로 알고 있는 변의 길이를 각각 구하면

$$\overline{AB}=\sqrt{(1-0)^2+(3-1)^2}=\sqrt{5}$$

$$\overline{BC}=\sqrt{(k-1)^2+(1-3)^2}=\sqrt{k^2-2k+5}$$

이다. 평행사변형 ABCD의 둘레의 길이가 $6\sqrt{5}$이므로

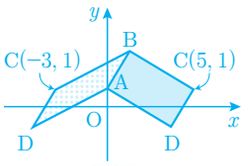
$$2(\overline{AB}+\overline{BC})=2(\sqrt{5}+\overline{BC})=6\sqrt{5}$$

에서 $\overline{BC}=2\sqrt{5}$이다. 따라서

$$\overline{BC}^2=k^2-2k+5=20\ \Rightarrow\ (k+3)(k-5)=0$$

에서 $k=-3$ 또는 $k=5$이다.

(2) 평행사변형 ABCD의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이의 2배와 같다. 점 A와 점 C의 y좌표가 같으므로 삼각형 ABC의 밑변을 선분 AC로 잡으면



(i) $k=-3$일 때, 삼각형 ABC의 밑변의 길이는 $\overline{AC}=3$이고 높이는 $|3-1|=2$이다. 따라서 평행사변형 ABCD의 넓이는

$$2\times\frac{1}{2}\times3\times2=6$$

(ii) $k=5$일 때, 삼각형 ABC의 밑변의 길이는 $\overline{AC}=5$이고 높이는 $|3-1|=2$이므로 평행사변형 ABCD의 넓이는

$$2\times\frac{1}{2}\times5\times2=10$$

(i), (ii)에 의하여 평행사변형 ABCD의 넓이는 6 또는 10이다.

(3) C(5, 1)일 때, 평행사변형의 넓이가 최대이다. 평행사변형의 성질에 의하여 평행사변형 ABCD의 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로 점 D의 좌표를 (a, b)로 놓으면

$$\frac{0+5}{2}=\frac{1+a}{2},\quad \frac{1+1}{2}=\frac{3+b}{2}$$

에서 $a=4$, $b=-1$이다. 따라서 점 D의 좌표는 (4, −1)이다.

답 (1) $k=-3$ 또는 $k=5$ (2) 6 또는 10 (3) D(4, −1)

11 직선의 방정식

01 직선의 방정식

1. 직선의 방정식

(1) 한 점 (x_1, y_1)을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $\boldsymbol{y-y_1=m(x-x_1)}$

(2) 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$를 지나는 직선의 방정식은 $\boldsymbol{y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)}$
(단, $x_1 \neq x_2$)

(3) x절편이 a이고 y절편이 b인 직선의 방정식은 $\boldsymbol{\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1}$이다. (단, $a \neq 0$, $b \neq 0$)

2. 직선의 방정식의 일반형

x, y에 대한 일차방정식 $ax+by+c=0$의 꼴 (단, $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$)

3. m의 값에 관계없이 지나는 점

직선 $(x-x_1)m+y-y_1=0$은 m의 값에 관계없이 점 (x_1, y_1)을 항상 지난다.

02 두 직선의 위치 관계

1. 두 직선의 위치 관계

두 직선의 위치 관계	서로 평행하다.	일치한다.	한 점에서 만난다.	서로 수직이다.
$y=mx+n$과 $y=m'x+n'$	$m=m'$, $n \neq n'$	$m=m'$, $n=n'$	$m \neq m'$	$mm'=-1$
$ax+by+c=0$과 $a'x+b'y+c'=0$	$\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'} \neq \dfrac{c}{c'}$	$\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}$	$\dfrac{a}{a'} \neq \dfrac{b}{b'}$	$aa'+bb'=0$

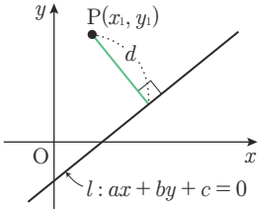
2. 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식

두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$이 한 점에서 만날 때, 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은 $ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$이다. (단, k는 실수이다.)

03 점과 직선 사이의 거리

점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$과 직선 $l: ax+by+c=0$ 사이의 **거리** d는

$$\boldsymbol{d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$



마·타·노·트

▶ **축에 평행한 직선의 방정식**

한 점 (x_1, y_1)을 지나고

1. x축에 평행한 직선은 $y=y_1$
2. y축에 평행한 직선은 $x=x_1$

▶ **직선의 방정식의 표준형**

$y=mx+n$의 꼴을 직선의 방정식의 표준형이라 한다.

▶ **평행한 두 직선 사이의 거리**

평행한 두 직선

$l_1: ax+by+c_1=0$

$l_2: ax+by+c_2=0$

사이의 거리 d는 직선 l_2 위의 한 점 (p, q)와 직선 l_1 사이의 거리이다.

즉,

$$\boldsymbol{d=\dfrac{|ap+bq+c_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

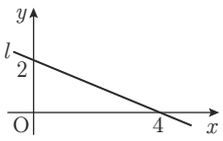
358 2009학년도 03월 교육청

개념 01

오른쪽 그림과 같이 두 점 $(4, 0)$, $(0, 2)$를 지나는 직선 l이 있다. 직선 l 위의 한 점 (x, y)에 대하여 등식

$$x^2+ay^2+bx+c=0$$

이 항상 성립하도록 실수 a, b, c를 정할 때, $|a|+|b|+|c|$의 값을 구하시오.



직선 l의 x절편이 4이고 y절편이 2이므로 직선 l의 방정식은

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1 \Rightarrow y=-\frac{1}{2}x+2$$

이다. 이를 주어진 등식에 대입하면

$$x^2+a\left(-\frac{1}{2}x+2\right)^2+bx+c=0 \Rightarrow \left(1+\frac{a}{4}\right)x^2-(2a-b)x+(4a+c)=0$$

이다. 이 식이 x에 대한 항등식이므로 항등식의 성질에 의하여

$$1+\frac{a}{4}=0,\quad 2a-b=0,\quad 4a+c=0$$

이다. 이 세 식을 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=-8$, $c=16$이고 구하는 값은 $|a|+|b|+|c|=28$이다.

답 28

359 2013학년도 11월 교육청

개념 04

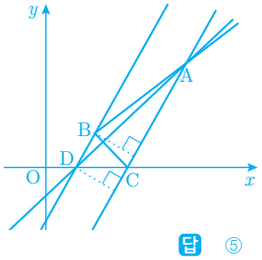
좌표평면 위에 세 점 A(5, 3), B(2, 1), C(3, 0)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 선분 OC 위를 움직이는 점 D에 대하여 삼각형 ABC의 넓이와 삼각형 ADC의 넓이가 같을 때, 직선 AD의 기울기는? (단, O는 원점이다.)

① $\frac{5}{7}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{7}{9}$
④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{9}{11}$

점 B를 지나고 직선 AC와 평행한 직선이 선분 OC와 만나는 점을 D$(a, 0)$라 하자. 삼각형 ABC의 넓이와 삼각형 ADC의 넓이가 같으므로 직선 BD의 기울기는 직선 AC의 기울기와 같다. 따라서

$$\frac{1-0}{2-a}=\frac{3-0}{5-3} \Rightarrow a=\frac{4}{3}$$

이므로 직선 AD의 기울기는 $\frac{3-0}{5-\frac{4}{3}}=\frac{9}{11}$이다.



답 ⑤

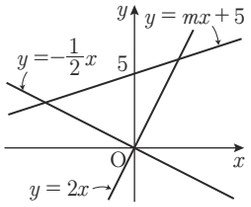
360 2013학년도 03월 교육청

개념 04, 08

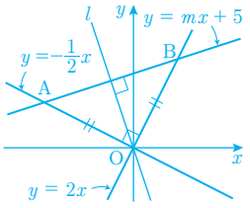
좌표평면에서 세 직선

$$y=2x,\ y=-\frac{1}{2}x,\ y=mx+5$$

로 둘러싸인 도형이 이등변삼각형일 때, 양수 m의 값을 구하시오.



두 직선 $y=2x$, $y=-\frac{1}{2}x$는 서로 수직이다. 그림과 같이 두 직선 $y=2x$, $y=-\frac{1}{2}x$의 교점을 O$(0, 0)$, 두 직선 $y=-\frac{1}{2}x$, $y=mx+5$의 교점을 A, 두 직선 $y=2x$, $y=mx+5$의 교점을 B라 하자. 주어진 세 직선으로 둘러싸인 삼각형 AOB는 $\angle O=90°$인 직각이등변삼각형이다. 따라서 직선 $y=mx+5$는 각 AOB를 이등분하는 직선 l과 서로 수직이다.



두 직선 $2x-y=0$, $x+2y=0$이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{|2x-y|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|x+2y|}{\sqrt{1^2+2^2}} \Rightarrow |2x-y|=|x+2y|$$

(i) $2x-y=x+2y$이면 $x-3y=0$이다.
(ii) $2x-y=-(x+2y)$이면 $3x+y=0$이다.

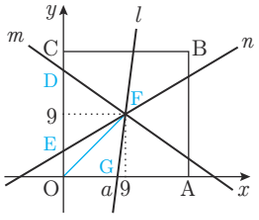
(i), (ii)에서 $m>0$이므로 직선 l의 방정식은 $y=-3x$이고 직선 $l: y=-3x$가 직선 $y=mx+5$에 수직이므로 $-3\cdot m=-1$에서 $m=\frac{1}{3}$이다.

답 $\frac{1}{3}$

361 2016년도 11월 교육청

개념 06, 07

오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위의 네 점 O$(0, 0)$, A$(18, 0)$, B$(18, 18)$, C$(0, 18)$을 꼭짓점으로 하는 정사각형 ABCD에 대하여 점 $(9, 9)$를 지나고 x축과 만나는 세 직선 l, m, n이 정사각형 OABC의 넓이를 6등분한다. 직선 l의 x절편을 a라 하고 $6\le a\le 10$일 때, 두 직선 m과 n의 기울기의 곱의 최댓값은 α, 최솟값은 β이다. $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하시오.



직선 m, n이 y축과 만나는 점을 각각 D, E라 하고 점 $(9, 9)$를 F라 하자. 정사각형 OABC의 넓이가 324이므로 삼각형 DEF의 넓이는 54이고 $\overline{DE}=12$이다. 직선 l이 x축과 만나는 점을 G라 하면 사각형 OGFE의 넓이 54는 삼각형 OGF와 삼각형 OEF의 넓이의 합과 같으므로 $\overline{OE}+\overline{OG}=12$이다. 이때,

$$\overline{OG}=a,\quad \overline{OE}=12-a,\quad \overline{OD}=24-a$$

에서 D$(0, 24-a)$, E$(0, 12-a)$이므로 두 점 D, F를 지나는 직선 m의 기울기는 $\frac{a-15}{9}$이고 두 점 E, F를 지나는 직선 n의 기울기는 $\frac{a-3}{9}$이다. 두 직선 m, n의 기울기의 곱은

$$\frac{a-15}{9}\times\frac{a-3}{9}=\frac{1}{81}(a^2-18a+45)=\frac{1}{81}(a-9)^2-\frac{4}{9}$$

이고 $6\le a\le 10$의 범위에서 $a=6$일 때 최댓값 $-\frac{1}{3}$을 가지고 $a=9$일 때 최솟값 $-\frac{4}{9}$를 가진다. 따라서 $\alpha=-\frac{1}{3}$, $\beta=-\frac{4}{9}$이므로 구하는 값은 $\alpha^2+\beta^2=\frac{25}{81}$이다.

답 $\frac{25}{81}$

개념 치료

개념

01. 직선의 방정식

362
세 점 $(3, -9)$, $(4, k)$, $(6, k^2)$이 삼각형을 이루지 않도록 하는 양수 k의 값을 구하시오.

주어진 세 점이 삼각형을 이루지 않으려면 세 점이 한 직선 위에 있어야 한다. 두 점 $(3, -9)$, $(4, k)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y+9=\frac{k+9}{4-3}(x-3) \quad \Rightarrow \quad y=(k+9)x-3k-36$$

이고 이 직선이 점 $(6, k^2)$을 지나므로

$$k^2=6(k+9)-3k-36 \quad \Rightarrow \quad k^2-3k-18=0$$

이다. $(k+3)(k-6)=0$에서 k는 양수이므로 $k=6$이다.

답 6

363 중요
x절편과 y절편의 절댓값이 같고 부호가 다른 직선이 두 점 $(3, 6)$, $(k, 8)$을 지날 때, k의 값은? (단, 이 직선은 원점을 지나지 않는다.)

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

x절편을 a $(a\neq 0)$라 하면 y절편은 $-a$이므로 구하는 직선의 방정식은

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{a}=1$$

이다. 이 직선이 점 $(3, 6)$을 지나므로

$$\frac{3}{a}-\frac{6}{a}=1 \quad \Rightarrow \quad a=-3$$

이고 이 직선이 점 $(k, 8)$을 지나므로

$$\frac{k}{-3}-\frac{8}{-3}=1 \quad \Rightarrow \quad k=5$$

답 ①

364
세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심을 G라 하면 A$(6, 2)$이고 직선 BG의 방정식은 $y=3x-5$, 직선 CG의 방정식은 $y=\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}$이다. 직선 AB의 방정식을 구하시오.

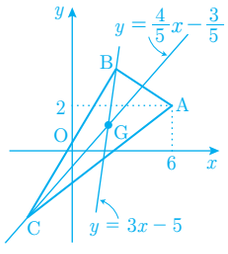
점 B가 직선 $y=3x-5$ 위의 점이므로 B$(t, 3t-5)$로 놓을 수 있다. 이때 직선 CG가 선분 AB의 중점 $\left(\frac{t+6}{2}, \frac{3t-3}{2}\right)$을 지나므로

$$\frac{3t-3}{2}=\frac{4}{5}\cdot\frac{t+6}{2}-\frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad t=3$$

에서 B$(3, 4)$이다. 따라서 직선 AB의 방정식은

$$y-2=\frac{4-2}{3-6}(x-6)$$

에서 $y=-\frac{2}{3}x+6$이다.



답 $y=-\frac{2}{3}x+6$

365 상위1%
x, y에 대한 이차방정식 $x^2+2xy+my^2+6x-2y+1=0$이 좌표평면에서 두 직선을 나타낼 때, 이 두 직선의 교점을 구하시오. (단, m은 상수이다.)

주어진 이차방정식의 좌변을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면 $x^2+2(y+3)x+my^2-2y+1=0$이므로 이 x에 대한 이차방정식의 근은

$$x=-y-3\pm\sqrt{(1-m)y^2+8y+8} \quad \cdots ㉠$$

이다. ㉠이 두 직선을 나타내려면 근호 안의 식 $(1-m)y^2+8y+8$이 완전제곱식이 되어야 한다. 즉, y에 대한 이차방정식 $(1-m)y^2+8y+8=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=4^2-(1-m)\cdot 8=8+8m=0$$

에서 $m=-1$이다. 이를 ㉠에 대입하여 정리하면 두 직선은

$$x+(1-\sqrt{2})y+3-2\sqrt{2}=0 \quad \cdots ㉡$$

$$x+(1+\sqrt{2})y+3+2\sqrt{2}=0 \quad \cdots ㉢$$

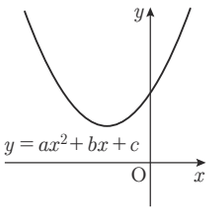
에서 ㉡−㉢을 하여 정리하면 $y=-2$이고 이를 ㉡에 대입하면 $x=-1$이다. 따라서 구하는 두 직선의 교점은 $(-1, -2)$이다.

답 $(-1, -2)$

개념

02. 직선의 개형

366
이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 직선 $ax+by+c=0$이 지나는 사분면을 모두 구하시오.



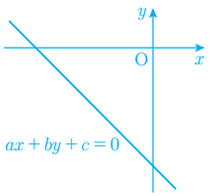
주어진 이차함수의 그래프가 아래로 볼록하고, 꼭짓점의 x좌표가 0보다 작고, y절편이 0보다 크므로

$$a>0, \quad -\frac{b}{2a}<0, \quad c>0$$

이다. 즉, $a>0$, $b>0$, $c>0$이다. 직선 $ax+by+c=0$을 표준형으로 변형하면 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$이므로

$$\text{기울기}=-\frac{a}{b}<0, \quad y\text{절편}=-\frac{c}{b}<0$$

이다. 따라서 직선 $ax+by+c=0$의 개형은 그림과 같고 제2, 3, 4사분면을 지난다.



답 제2, 3, 4사분면

367 중요
0이 아닌 세 실수 a, b, c가

$$\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}, \quad \frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-c}}=-\sqrt{\frac{a}{c}}$$

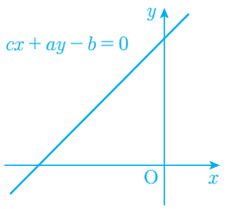
를 만족시킬 때, 직선 $cx+ay-b=0$이 지나지 않는 사분면을 구하시오.

음수의 제곱근의 성질에 의하여 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$에서 $a<0$, $b<0$이고 $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-c}}=-\sqrt{\frac{a}{c}}$에서 $-a>0$이므로 $-c<0$이다. 즉, $c>0$이다.

직선 $cx+ay-b=0$을 표준형으로 변형하면 $y=-\frac{c}{a}x+\frac{b}{a}$이고

$$\text{기울기}=-\frac{c}{a}>0, \quad y\text{절편}=\frac{b}{a}>0$$

이다. 따라서 직선 $cx+ay=b=0$는 제4사분면을 지나지 않는다.



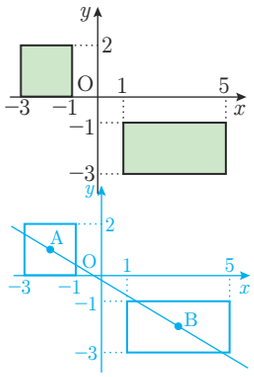
답 제4사분면

개념

03. 도형과 직선

368

오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 있는 두 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선의 방정식을 구하시오.



두 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선은 두 직사각형의 대각선의 교점을 모두 지나야 한다. 오른쪽 그림과 같이 $x<0$인 부분에 있는 직사각형의 대각선의 교점을 A라 하고 $x>0$인 부분에 있는 직사각형의 대각선의 교점을 B라 하자.

$$A\left(\frac{-1-3}{2}, \frac{0+2}{2}\right) \Rightarrow A(-2, 1)$$

$$B\left(\frac{1+5}{2}, \frac{-1-3}{2}\right) \Rightarrow B(3, -2)$$

에서 구하는 직선은 두 점 A, B를 지나는 직선이므로

$$y-1=\frac{-2-1}{3+2}(x+2) \Rightarrow y=-\frac{3}{5}x-\frac{1}{5}$$

답 $y=-\frac{3}{5}x-\frac{1}{5}$

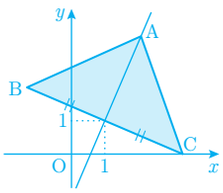
369 중요

세 점 A(2, 5), B(−3, 2), C(5, 0)에 대하여 점 A를 지나고 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식을 $y=mx+n$이라 할 때, $m-n$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7

④ 8 ⑤ 9

점 A를 지나고 삼각형 ABC를 이등분하는 직선은 그림과 같이 선분 BC의 중점



$$\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{2+0}{2}\right) \Rightarrow (1, 1)$$

을 지나야 한다. 따라서 구하는 직선은 두 점 (1, 1), (2, 5)를 지나는 직선이므로

$$y-1=\frac{5-1}{2-1}(x-1) \Rightarrow y=4x-3$$

이고 $m=4$, $n=-3$에서 구하는 값은 $m-n=7$이다.

답 ③

370

네 점 A(1, a), B(0, b), C(c, 5), D(−1, 2)를 꼭짓점으로 하는 평행사변형 ABCD의 넓이를 직선 $y=2x+6$이 이등분할 때, $a+b+c$의 값을 구하시오.

선분 AC의 중점은 $\left(\frac{1+c}{2}, \frac{a+5}{2}\right)$이고 선분 BD의 중점은 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{b+2}{2}\right)$이다. 평행사변형 ABCD의 선분 AC의 중점과 선분 BD의 중점이 서로 같으므로

$$\frac{1+c}{2}=-\frac{1}{2}, \frac{a+5}{2}=\frac{b+2}{2} \Rightarrow c=-2, a-b=-3$$

이다. 이때 점 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{b+2}{2}\right)$가 직선 $y=2x+6$ 위에 있으므로 $\frac{b+2}{2}=-1+6$에서 $b=8$이고 $a=5$이다. 따라서 구하는 값은 $a+b+c=11$이다.

답 11

개념

04. 두 직선의 위치 관계

371 중요

직선 $ax+by-3=0$이 직선 $x+4aby+4=0$과 서로 평행하고 직선 $4ax-by+9=0$에 수직일 때, 두 양수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① $\frac{3}{4}$ ② 1 ③ $\frac{5}{4}$

④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

두 직선 $ax+by-3=0$, $x+4aby+4=0$이 서로 평행하므로

$$\frac{a}{1}=\frac{b}{4ab}\neq\frac{-3}{4} \Rightarrow a^2=\frac{1}{4}$$

에서 a가 양수이므로 $a=\frac{1}{2}$이다. 또한 두 직선 $ax+by-3=0$, $4ax-by+9=0$이 서로 수직이므로

$$a\cdot 4a+b\cdot(-b)=4a^2-b^2=1-b^2=0 \Rightarrow b^2=1$$

에서 b가 양수이므로 $b=1$이다. 따라서 구하는 값은 $a+b=\frac{3}{2}$이다.

답 ④

372

세 직선 $x-2y-6=0$, $3x-y-8=0$, $ax-2y-2=0$이 삼각형을 이루지 않도록 하는 모든 상수 a의 값의 합을 구하시오.

세 직선을 각각 $\begin{cases} x-2y-6=0 & \cdots ㉠ \\ 3x-y-8=0 & \cdots ㉡ \\ ax-2y-2=0 & \cdots ㉢ \end{cases}$ 이라 하자. 두 직선 ㉠, ㉡에서 $\frac{1}{3}\neq\frac{-2}{-1}$이므로 서로 평행하지 않다. 따라서 세 직선이 모두 평행한 경우는 없고 세 직선이 삼각형을 이루지 않도록 하는 경우는 다음과 같다.

(i) 두 직선 ㉠, ㉢이 서로 평행한 경우, $\frac{1}{a}=\frac{-2}{-2}\neq\frac{-6}{-2}$이므로 $a=1$이다.

(ii) 두 직선 ㉡, ㉢이 서로 평행한 경우, $\frac{3}{a}=\frac{-1}{-2}\neq\frac{-8}{-2}$이므로 $a=6$이다.

(iii) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우, 두 직선 ㉠, ㉡의 교점을 직선 ㉢이 지난다. 두 방정식 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=-2$이고 직선 ㉢이 점 (2, −2)을 지나므로 $2a+4-2=0$에서 $a=-1$이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 모든 상수 a의 값의 합은 $1+6-1=6$이다.

답 6

373

서로 다른 세 직선 $ax+y-3=0$, $3x+by-5=0$, $x+2y+8=0$에 의하여 좌표평면이 네 부분으로 나누어 질 때, 두 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오.

세 직선을 각각 $\begin{cases} ax+y-3=0 & \cdots ㉠ \\ 3x+by-5=0 & \cdots ㉡ \\ x+2y+8=0 & \cdots ㉢ \end{cases}$ 이라 하자. 서로 다른 세 직선이 좌표평면을 네 부분으로 나누면 세 직선이 모두 평행하다. 두 직선 ㉠, ㉢이 서로 평행하면

$$\frac{a}{1}=\frac{1}{2}\neq\frac{-3}{8}$$

에서 $a=\frac{1}{2}$이다. 또한 두 직선 ㉡, ㉢이 서로 평행하면

$$\frac{3}{1}=\frac{b}{2}\neq\frac{-5}{8}$$

에서 $b=6$이다. 따라서 구하는 값은 $ab=3$이다.

답 3

개념

05. 수직이등분선

374 중요

두 점 A(8, −3), B(4, −1)을 이은 선분 AB를 수직이등분하는 직선의 방정식이 점 $(a, 8)$을 지날 때, a의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

선분 AB를 수직이등분하는 직선은 직선 AB와 수직이고 선분 AB의 중점을 지난다.
직선 AB의 기울기는 $\frac{-1+3}{4-8}=-\frac{1}{2}$이므로 선분 AB를 수직이등분하는 직선의 기울기는 2이다. 또한 선분 AB의 중점의 좌표는 $\left(\frac{8+4}{2}, \frac{-3-1}{2}\right)$에서 $(6, -2)$이다.
구하는 직선은 기울기가 2이고 점 $(6, -2)$를 지나므로

$$y+2=2(x-6) \quad \Rightarrow \quad y=2x-14$$

이다. 이 직선이 점 $(a, 8)$을 지나므로 $8=2a-14$에서 $a=11$이다.

답 ①

375

마름모 ABCD에 대하여 두 점 A, C의 좌표가 (2, 2), (4, 6)일 때, 두 점 B, D를 지나는 직선의 방정식을 구하시오.

마름모는 두 대각선이 서로 다른 것을 수직이등분한다. 즉, 두 점 B, D를 지나는 직선은 선분 AC의 수직이등분선이다. 두 점 A, C를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{6-2}{4-2}=2$이고 선분 AC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{2+4}{2}, \frac{2+6}{2}\right)$에서 $(3, 4)$이다. 따라서 직선 BD의 방정식은 기울기가 $-\frac{1}{2}$이고 점 $(3, 4)$를 지나는 직선의 방정식이므로

$$y-4=-\frac{1}{2}(x-3) \quad \Rightarrow \quad y=-\frac{1}{2}x+\frac{11}{2}$$

답 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{11}{2}$

개념

06. 직선이 항상 지나는 점

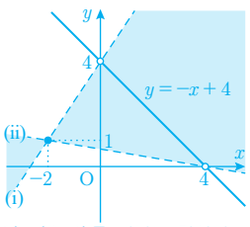
376 중요

두 직선 $y=-x+4$, $mx-y+2m+1=0$이 제1사분면에서 만날 때, 실수 m의 값의 범위를 구하시오.

방정식 $mx-y+2m+1=0$을 m에 대하여 정리하면

$$m(x+2)-(y-1)=0 \qquad \cdots ㉠$$

이므로 이 직선은 m의 값에 관계없이 점 $(-2, 1)$을 지난다. 또한 ㉠을 표준형으로 나타내면 $y=mx+2m+1$이므로 m은 직선 ㉠의 기울기이다.
따라서 직선 ㉠이 직선 $y=-x+4$와 제1사분면에서 만나기 위해서는 오른쪽 그림과 같이 색칠한 영역에 직선 ㉠이 있어야 한다. 즉, m의 값이 두 점 $(-2, 1)$, $(0, 4)$를 지나는 직선의 기울기와 두 점 $(-2, 1)$, $(4, 0)$을 지나는 직선의 기울기 사이에 있어야 한다.



(i) ㉠이 점 $(0, 4)$를 지날 때, $2m-3=0$에서 $m=\frac{3}{2}$이다.
(ii) ㉠이 점 $(4, 0)$을 지날 때, $6m+1=0$에서 $m=-\frac{1}{6}$이다.
(i), (ii)에 의하여 구하는 m의 값의 범위는 $-\frac{1}{6}<m<\frac{3}{2}$이다.

답 $-\frac{1}{6}<m<\frac{3}{2}$

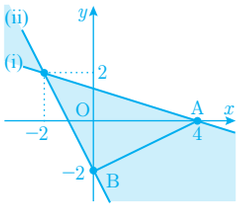
377 상위1%

두 점 A(4, 0), B(0, −2)를 잇는 선분 AB 위의 한 점 (x, y)에 대하여 $\frac{y-2}{x+2}$의 최댓값과 최솟값의 곱을 구하시오.

$\frac{y-2}{x+2}=m$으로 놓으면

$$m(x+2)-(y-2)=0 \qquad \cdots ㉠$$

이므로 이 직선은 m의 값에 관계없이 점 $(-2, 2)$를 지난다. ㉠을 표준형으로 나타내면 $y=mx+2m+2$이므로 m은 직선 ㉠의 기울기이다. 또한 점 (x, y)는 선분 AB와 직선 ㉠의 교점이므로 오른쪽 그림과 같이 색칠한 영역에 직선 ㉠이 있어야 한다. 즉, m의 값이 두 점 $(-2, 2)$, $(4, 0)$을 지나는 직선의 기울기와 두 점 $(-2, 2)$, $(0, -2)$를 지나는 직선의 기울기 사이에 있다.



(i) ㉠이 점 A(4, 0)을 지날 때, $6m+2=0$에서 $m=-\frac{1}{3}$이다.
(ii) ㉠이 점 B(0, −2)를 지날 때, $2m+4=0$에서 $m=-2$이다.
(i), (ii)에 의하여 $\frac{y-2}{x+2}$의 최댓값은 $-\frac{1}{3}$, 최솟값은 −2이므로 구하는 값은 $\frac{2}{3}$이다.

답 $\frac{2}{3}$

개념

07. 두 직선의 교점을 지나는 직선

378 중요

실수 k의 값에 관계없이 직선 $(k-1)x-(2k-3)y+2k-5=0$이 항상 지나는 점을 P라 할 때, 점 P를 지나고 직선 $y=-x+3$에 수직인 직선의 방정식을 구하시오.

주어진 직선의 방정식을 k에 대하여 정리하면

$$(x-2y+2)k-(x-3y+5)=0$$

이고 이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$x-2y+2=0, \quad x-3y+5=0$$

을 만족한다. 이 두 식을 연립하여 풀면 $x=4$, $y=3$이므로 주어진 직선은 k의 값에 관계없이 점 P(4, 3)을 항상 지난다. 한편, 직선 $y=-x+3$에 수직이므로 구하는 직선은 기울기가 1이고 점 P(4, 3)을 지난다. 따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y-3=(x-4) \quad \Rightarrow \quad y=x-1$$

답 $y=x-1$

379

두 직선 $x-y+1=0$, $5x-2y+4=0$의 교점을 지나는 직선 l이 직선 $2x-y+3=0$에 평행할 때, 직선 l의 y절편은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

두 직선 $x-y+1=0$, $5x-2y+4=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x-y+1+k(5x-2y+4)=0$$

$$\Rightarrow \quad (5k+1)x+(-2k-1)y+4k+1=0 \qquad \cdots ㉠$$

이다. 직선 ㉠이 직선 $2x-y+3=0$과 서로 평행하므로

$$\frac{5k+1}{2}=\frac{-2k-1}{-1}\neq\frac{4k+1}{3} \quad \Rightarrow \quad k=1$$

에서 $k=1$을 다시 ㉠에 대입하여 정리하면 $l: 6x-3y+5=0$이다. 직선 l의 y절편을 a라 하면 점 직선 l이 점 $(0, a)$를 지나므로 $-3a+5=0$에서 $a=\frac{5}{3}$이다.

답 ⑤

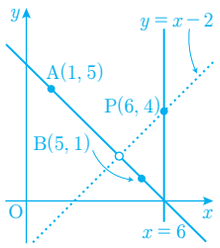
380 상위1%

직선 $l: x-2y+2+k(x-y-2)=0$이 실수 k의 값에 관계없이 항상 지나는 점을 P라 하고 두 점 A(1, 5), B(5, 1)에 대하여 직선 AB 위의 점 중에서 직선 l과의 교점이 될 수 없는 점의 좌표를 Q라 할 때, $\overline{PQ}$의 값을 구하시오.

직선 l의 방정식이 k의 값에 관계없이 성립하므로 $x-2y+2=0$, $x-y-2=0$을 연립하여 풀면 $x=6$, $y=4$이므로 직선 l은 k의 값에 관계없이 점 P(6, 4)를 지난다.
또한 직선 l을 x, y에 대하여 정리하면 $(k+1)x-(k+2)y+(2-2k)=0$이다.

(i) $k=-2$일 때, 직선 l은 $x=6$이고 직선 AB와 점 (6, 0)에서 만난다.

(ii) $k\neq-2$일 때, 직선 l은 $y=\dfrac{k+1}{k+2}x+\dfrac{2-2k}{k+2}$이다.
기울기는 $\dfrac{k+1}{k+2}=1-\dfrac{1}{k+2}$에서 $\dfrac{1}{k+2}\neq0$이므로 1이 아닌 실수값을 가진다.



(i), (ii)에서 직선 l의 기울기는 1이 될 수 없으므로 점 Q는 점 P(6, 4)를 지나고 기울기가 1인 직선 $y=x-2$와 직선 AB의 방정식 $x+y-6=0$의 교점이다.
따라서 두 직선 $x-y-2=0$, $x+y-6=0$의 교점을 구하면 Q(4, 2)이므로 선분 PQ의 길이는 $\overline{PQ}=\sqrt{(4-6)^2+(2-4)^2}=2\sqrt{2}$이다.

답 $2\sqrt{2}$

개념

08. 점과 직선 사이의 거리

381 중요

평행한 두 직선 $3x-y+a=0$, $6x-by+4=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 최댓값은?

① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

두 직선 $3x-y+a=0$, $6x-by+4=0$이 서로 평행하므로

$$\frac{3}{6}=\frac{-1}{-b}\neq\frac{a}{4}$$

에서 $b=2$이고 $a\neq2$이다. 이때 평행한 두 직선 $3x-y+a=0$, $3x-y+2=0$ 사이의 거리는 직선 $3x-y+2=0$ 위의 점 (0, 2)와 직선 $3x-y+a=0$ 사이의 거리와 같다. 이 거리가 $\sqrt{10}$이므로

$$\frac{|-2+a|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|a-2|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}\quad\Rightarrow\quad|a-2|=10$$

에서 $a=-8$ 또는 $a=12$이다. 따라서 $a+b$의 최댓값은 $12+2=14$이다.

답 ④

382

두 직선 $x-2y+5=0$, $3x-y=0$의 교점을 지나는 직선과 원점 사이의 거리의 최댓값을 구하시오.

두 직선 $x-2y+5=0$, $3x-y=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$(x-2y+5)+k(3x-y)=0\quad\Rightarrow\quad(3k+1)x+(-k-2)y+5=0\quad\cdots\ ㉠$$

이다. 원점 (0, 0)과 직선 ㉠ 사이의 거리를 d라 하면

$$d=\frac{|5|}{\sqrt{(3k+1)^2+(-k-2)^2}}=\frac{5}{\sqrt{10k^2+10k+5}}$$

이다. d가 최대일 때는 분모가 최소일 때이다. $f(k)=10k^2+10k+5$이라 하면

$$f(k)=10k^2+10k+5=10\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}$$

이므로 $k=-\dfrac{1}{2}$일 때, $f(k)$는 최솟값 $\dfrac{5}{2}$를 가지고 이때 d는 $\sqrt{10}$이므로 d의 최댓값은 $\sqrt{10}$이다.

답 $\sqrt{10}$

383 중요

세 점 A(2, 4), B(6, 0), C(3, a)를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이가 6이상이 되도록 하는 a의 값의 범위를 구하시오.

삼각형 ABC의 밑변을 선분 AB로 놓으면

$$\overline{AB}=\sqrt{(6-2)^2+(0-4)^2}=4\sqrt{2}$$

이고 삼각형의 높이는 점 C와 직선 AB 사이의 거리이다. 직선 AB의 방정식은

$$y-4=\frac{0-4}{6-2}(x-2)\quad\Rightarrow\quad x+y-6=0$$

이고 점 C(3, a)와 직선 $x+y-6=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3+a-6|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|a-3|}{\sqrt{2}}$$

이다. 이때 삼각형 ABC의 넓이가 6 이상이 되기 위해서는

$$\frac{1}{2}\cdot4\sqrt{2}\cdot\frac{|a-3|}{\sqrt{2}}\geq6\quad\Rightarrow\quad|a-3|\geq3$$

에서 $a-3\leq-3$ 또는 $a-3\geq3$이므로 구하는 a의 값의 범위는 $a\leq0$ 또는 $a\geq6$이다.

답 $a\leq0$ 또는 $a\geq6$

384 상위1%

두 점 A(4, 0), B(−4, 0)과 직선 $x-y+8=0$ 위의 한 점 P에 대하여 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 최솟값을 구하시오.

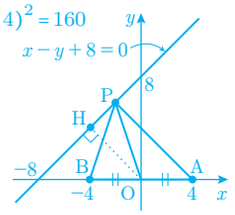
점 P가 직선 AB 위에 있는 경우, 세 점 A, B, P를 세 꼭짓점으로 하는 삼각형은 존재하지 않고 이때 P(−8, 0)이다. 이 외의 경우, 세 점 A, B, P에 대하여 삼각형 ABP가 존재한다.

(i) P(−8, 0)인 경우,

$$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=(-8-4)^2+(-8+4)^2=160$$

(ii) P(−8, 0)가 아닌 경우, 좌표평면에서 원점을 O, 원점에서 직선 $x-y+8=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 ABP에서 중선정리에 의하여

$$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=2(\overline{OP}^2+\overline{OA}^2)$$
$$=2(\overline{OP}^2+16)\geq2(\overline{OH}^2+16)$$



이다. $\overline{OH}$의 길이는 원점과 직선 $x-y+8=0$ 사이의 거리이므로

$$\overline{OH}=\frac{|0-0+8|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=4\sqrt{2}$$

이다. 따라서 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 최솟값은 $2(32+16)=96$이다.

(i), (ii)에 의하여 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 최솟값은 96이다.

답 96

385

두 직선 $2x-y+3=0$, $x+2y-6=0$이 이루는 각의 이등분선 중에서 기울기가 양수인 직선이 점 $(a, 5)$를 지날 때, a의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

각의 이등분선 위의 한 점을 P(x, y)라 하면 점 P와 주어진 두 직선 사이의 거리가 같으므로

$$\frac{|2x-y+3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|x+2y-6|}{\sqrt{1^2+2^2}}$$

에서 $|2x-y+3|=|x+2y-6|$이다.

(i) $2x-y+3=x+2y-6$이면 $x-3y+9=0$이다.

(ii) $2x-y+3=-(x+2y-6)$이면 $3x+y-3=0$이다.

(i), (ii)에서 기울기가 양수인 직선은 $x-3y+9=0$이다. 이 직선이 점 $(a, 5)$를 지나므로 $a-15+9=0$에서 $a=6$이다.

답 ⑤

386

직선 $y=(k^2-4k+3)x+(k+1)$이 제4사분면을 지나지 않도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

주어진 직선의 기울기는 k^2-4k+3이고 y절편은 $k+1$이다. 기울기와 y절편이 모두 0 이상이면 제4사분면을 지나지 않는다.

(i) 기울기가 0 이상일 때, $k^2-4k+3=(k-1)(k-3)\geq 0$에서 $k\leq 1$ 또는 $k\geq 3$

(ii) y절편이 0 이상일 때, $k+1\geq 0$에서 $k\geq -1$

(i), (ii)의 공통범위는 $-1\leq k\leq 1$ 또는 $k\geq 3$이다.

답 $-1\leq k\leq 1$ 또는 $k\geq 3$

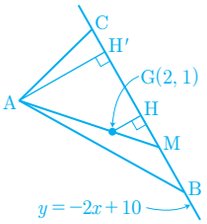
387

세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심이 G(2, 1)이고 직선 BC의 방정식이 $y=-2x+10$일 때, 점 A와 직선 BC 사이의 거리를 구하시오.

선분 BC의 중점을 M, G에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H, A에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H′라 하자. 삼각형 MGH와 삼각형 MAH′는 닮음이고 무게중심의 성질에 의하여 $\overline{MA}:\overline{MG}=3:1$이므로 그 닮음비는 3:1이다. 따라서 점 A와 직선 BC 사이의 거리는 $\overline{AH}=3\overline{GH}$이다. $\overline{GH}$의 길이는 점 G(2, 1)과 직선 $2x+y-10=0$ 사이의 거리이므로

$$\overline{GH}=3\times\frac{|4+1-10|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$$

이고 $\overline{AH}=3\overline{GH}=3\sqrt{5}$이다.



답 $3\sqrt{5}$

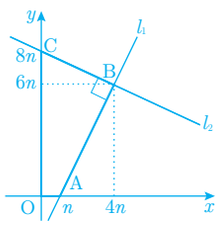
388 마타

좌표평면에서 자연수 n에 대하여 직선 $l_1:y=2(x-n)$과, 직선 l_1 수직이고 y절편이 직선 l_1의 x절편의 8배인 직선 l_2가 있다. 두 직선 l_1, l_2와 x축, y축으로 이루어진 사각형의 네 변 위에 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수가 200 이하가 되도록 하는 자연수 n의 최댓값을 구하시오.

직선 $l_1:y=2x-2n$의 기울기가 2이고 x절편이 n이므로 직선 l_2는 기울기가 $-\frac{1}{2}$이고 y절편이 $8n$인 직선이다. 따라서 $l_2:y=-\frac{1}{2}x+8n$이고 l_1, l_2의 교점은 $(4n, 6n)$이다. 따라서 $A(n, 0)$, $B(4n, 6n)$, $C(0, 8n)$이라 할 때, 두 직선 l_1, l_2와 x축, y축으로 둘러싸인 사각형 OABC는 오른쪽 그림과 같다. 사각형의 각 변에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점은 선분 OA 위에서 $n+1$개, 선분 AB 위에서 $3n+1$개, 선분 BC 위에서 $2n+1$개, 선분 OC 위에서 $8n+1$개이다. 따라서 사각형 OABC의 네 변 위에 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는

$$(n+1)+(3n+1)+(2n+1)+(8n+1)-4=14n$$

이다. 이때 $14n\leq 200$에서 $n\leq 14.xxx$이므로 자연수 n의 최댓값은 14이다.



답 14

389 마타

세 점 A(0, n), B(n, $2n$), C(4, 0)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이가 6 이하가 되도록 하는 정수 n의 개수를 구하시오.

$n=0$일 때, 두 점 A, B가 같고 $n=-4$일 때, 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로 ABC가 삼각형이 될 수 없다. $n\neq 0$, $n\neq -4$일 때, 삼각형 ABC의 밑변을 변 AB로 놓으면 $\overline{AB}=\sqrt{(n-0)^2+(2n-n)^2}=\sqrt{2}|n|$이고 삼각형의 높이는 점 C와 직선 AB 사이의 거리이다. 직선 AB의 방정식은

$$y-n=\frac{2n-n}{n-0}(x-0) \quad\Rightarrow\quad x-y+n=0$$

이고 이 직선과 점 (4, 0) 사이의 거리는 $\frac{|4-0+n|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}|n+4|}{2}$이다. 따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}|n|\cdot\frac{\sqrt{2}|n+4|}{2}=\frac{|n(n+4)|}{2}\leq 6$$

이므로 $-12\leq n(n+4)\leq 12$이다.

(i) $n(n+4)\geq -12$에서 $n^2+4n+12=(n+4)^2\geq 0$이므로 모든 정수 n에 대하여 성립한다.

(ii) $n(n+4)\leq 12$에서 $n^2+4n-12=(n-2)(n+6)\leq 0$이므로 $-6\leq n\leq 2$이다.

(i), (ii)에 의하여 $-6\leq n\leq 2$이고, $n=0$, $n=-4$일 때 삼각형이 되지 않으므로 $-6\leq n<-4$ 또는 $-4<n<0$ 또는 $0<n\leq 2$이다. 따라서 정수 n의 값은 -6, -5, -3, -2, -1, 1, 2이고 그 개수는 7이다.

답 7

390 마타

실수 k에 대하여 서로 다른 두 직선 l_1, l_2가

$$l_1:3x-(k^2-1)y+k^3+1=0, \quad l_2:x-(k+1)y+k^2-1=0$$

일 때, **[보기]**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[보기]

ㄱ. 직선 l_1이 제4사분면을 지나지 않으면 직선 l_2도 제4사분면을 지나지 않는다.

ㄴ. 두 직선 l_1, l_2가 서로 수직이 되는 k의 값은 1개이다.

ㄷ. 두 직선 l_1, l_2가 서로 평행이 되는 k의 값은 2개이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$k=1$이면 $l_1:3x+2=0$, $l_2:x-2y=0$이고 $k=-1$이면 $l_1:x=0$, $l_2:x=0$이다.

ㄱ. (참) $k=\pm 1$인 경우, 두 직선이 모두 제4사분면을 지나지 않는다. $k\neq\pm 1$인 경우, 직선 l_1을 표준형으로 변형하면 $y=\frac{3}{k^2-1}x+\frac{k^2-k+1}{k-1}$이다. 직선 l_1이 제4사분면을 지나지 않으므로 기울기와 y절편이 모두 양수이다. 이때 k의 값에 관계없이 $k^2-k+1>0$이므로 $k^2-1>0$, $k-1>0$에서 $k>1$이다. 이때 직선 l_2를 표준형으로 변형하면 $l_2:y=\frac{1}{k+1}x+k-1$에서 $k>1$일 때 $\frac{1}{k+1}$과 $k-1$이 모두 양수이다. 따라서 이때 직선 l_2는 제4사분면을 지나지 않는다.

ㄴ. (참) 두 직선 l_1, l_2가 서로 수직일 때, $3\cdot 1+(k^2-1)(k+1)=0$이므로 이를 정리하면 $(k+2)(k^2-k+1)=0$이다. 이때 이차방정식 $k^2-k+1=0$이 실근을 가지지 않으므로 실수 k의 값은 -2뿐이다.

ㄷ. (거짓) $k=\pm 1$이면 직선 l_1, l_2는 서로 평행하지 않는다. 따라서 $k\neq\pm 1$이고 두 직선 l_1, l_2가 서로 평행하려면 $\frac{1}{3}=\frac{-(k+1)}{-(k^2-1)}\neq\frac{k^2-1}{k^3+1}$이다. k의 값을 구하면

$$-(k^2-1)=-3(k+1) \quad\Rightarrow\quad k^2-3k-4=(k+1)(k-4)=0$$

에서 $k\neq\pm 1$이므로 $k=4$이고 이때 $\frac{3}{1}=\frac{-15}{5}\neq\frac{65}{15}$이다. 따라서 두 직선 l_1, l_2가 서로 평행이 되는 실수 k의 값은 4이고 그 개수는 1이다.

답 ③

서 술 형

• 풀이 과정에 점수가 부여되니 풀이 과정 및 정답을 상세하게 서술하세요.

391

세 직선

$$x+y-4=0,\quad x-2y+8=0,\quad (a-2)x+a^2y-4=0$$

이 만나서 직각삼각형을 만들도록 하는 실수 a의 값을 구하시오.

주어진 세 직선을 각각

$$x+y-4=0 \quad \cdots ㉠$$

$$x-2y+8=0 \quad \cdots ㉡$$

$$(a-2)x+a^2y-4=0 \quad \cdots ㉢$$

이라 하자. 세 직선이 만나서 직각삼각형을 만드려면 세 직선 중 어느 두 직선만이 서로 수직이 되어야 하고 세 직선이 한 점에서 만나지 않아야 한다. [20%]

i) 두 직선 ㉠, ㉡은 $1\cdot 1+1\cdot(-2)=-1\neq 0$이므로 수직이 아니다.

ii) 두 직선 ㉠, ㉢이 서로 수직일 때,

$$1\cdot(a-2)+1\cdot a^2=0 \quad \Rightarrow \quad a^2+a-2=(a-1)(a+2)=0$$

에서 $a=1$ 또는 $a=-2$이다.

iii) 두 직선 ㉡, ㉢이 서로 수직일 때,

$$1\cdot(a-2)+(-2)\cdot a^2=0 \quad \Rightarrow \quad 2a^2-a+2=0$$

에서 a에 대한 이차방정식 $2a^2-a+2=0$의 판별식을 D라 할 때,

$$D=(-1)^2-4\cdot 2\cdot 2=-15<0$$

이다. 따라서 실수 a가 존재하지 않는다. [35%]

(i), (ii), (iii)에 의하여 세 직선 중 두 직선만 수직한 경우는 $a=1$ 또는 $a=-2$이다.

이때, 세 직선이 한 점에서 만나지 않아야 한다. ㉠, ㉡의 교점을 구하면 $(0, 4)$이고 이 점을 ㉢에 대입하면

$$4a^2-4=0 \quad \Rightarrow \quad (a+1)(a-1)=0$$

에서 $a=-1$ 또는 $a=1$이다. [35%]

따라서 직각삼각형이 되는 a의 값은 -2 뿐이다. [10%]

답 -2

392

좌표평면 위의 점 P가 두 직선 $x-3y+6=0$, $3x-y+10=0$이 이루는 각을 이등분하는 직선 위에 있을 때, 선분 OP의 길이의 최솟값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

주어진 두 직선 $x-3y+6=0$, $3x-y+10=0$이 이루는 각을 이등분하는 직선 위의 한 점을 $P(x, y)$라 할 때, 점 P와 직선 $x-3y+6=0$ 사이의 거리와 점 P와 직선 $3x-y+10=0$ 사이의 거리가 같으므로

$$\frac{|x-3y+6|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{|3x-y+10|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}$$

에서 $|x-3y+6|=|3x-y+10|$이다. 절댓값을 풀면

$$x-3y+6=3x-y+10 \quad \Rightarrow \quad x+y+2=0$$

$$x-3y+6=-(3x-y+10) \quad \Rightarrow \quad x-y+4=0$$

이므로 점 P는 직선 $x+y+2=0$ 또는 직선 $x-y+4=0$ 위에 있다. [40%]

(i) 점 P가 직선 $x+y+2=0$ 위의 점일 때, 선분 OP의 길이의 최솟값은 원점 $O(0, 0)$과 직선 $x+y+2=0$ 사이의 거리이므로

$$\overline{OP}\geq\frac{|0+0+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$$

에서 선분 OP의 길이의 최솟값은 $\sqrt{2}$이다. [25%]

(ii) 점 P가 직선 $x-y+4=0$ 위의 점일 때, 선분 OP의 길이의 최솟값은 원점 $O(0, 0)$과 직선 $x-y+4=0$ 사이의 거리이므로

$$\overline{OP}\geq\frac{|0-0+4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$$

에서 선분 OP의 길이의 최솟값은 $2\sqrt{2}$이다. [25%]

(i), (ii)에 의하여 $\overline{OP}$의 최솟값은 $\sqrt{2}$이다. [10%]

답 $\sqrt{2}$

393 단계형

일차함수 $f(x)=mx-2m-2$와 이차함수 $g(x)=-x^2-8x-7$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) 직선 $y=f(x)$가 m의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표를 구하시오.

(2) 직선 $y=f(x)$가 곡선 $y=g(x)$에 접할 때의 m의 값을 모두 구하시오.

(3) 직선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$의 교점이 존재하고 교점이 모두 제2사분면 위에 있도록 하는 m의 값의 범위를 구하시오.

(1) $y=mx-2m-2$을 m에 대하여 정리하면

$$m(x-2)-(y+2)=0 \quad \cdots ㉠$$

이므로 직선 $y=f(x)$는 m의 값에 관계없이 점 $(2, -2)$를 지난다.

(2) $f(x)=g(x)$를 정리하면

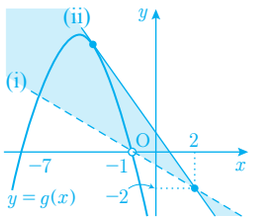
$$mx-2m-2=-x^2-8x-7 \quad \Rightarrow \quad x^2+(m+8)x-2m+5=0$$

이고 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=(m+8)^2+8m-20=m^2+24m+44=0$$

에서 $(m+2)(m+22)=0$이다. 따라서 $m=-2$ 또는 $m=-22$일 때, 직선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$가 접한다.

(3) $g(x)=-x^2-8x-7=-(x+1)(x+7)=0$에서 $y=g(x)$의 그래프는 두 점 $(-1, 0)$, $(-7, 0)$을 지난다. 또한 직선 $y=f(x)$에서 $y=m(x-2)-2$이므로 m은 직선 $y=f(x)$의 기울기이다. 직선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$의 그래프의 교점이 존재하고 교점이 제2사분면에서 있을 때, 오른쪽 그림과 같이 색칠한 영역에 직선 $y=f(x)$가 있어야 한다. (단, 점선은 경계를 포함하지 않는다.)



(i) 직선 $y=f(x)$가 점 $(-1, 0)$을 지날 때, $0=m\cdot(-1)-2m-2$에서 $m=-\frac{2}{3}$이다.

(ii) (2)에서 $m=-2$일 때 직선 $y=f(x)$가 제2사분면에서 곡선 $y=g(x)$에 접하므로 $m=-2$이다.

따라서 (i), (ii)에 의하여 구하는 m의 값의 범위는 $-2\leq m<-\frac{2}{3}$이다.

답 (1) $(2, -2)$ (2) -2 또는 -22 (3) $-2\leq m<-\frac{2}{3}$

12 원의 방정식

01 원의 방정식

1. 원의 방정식의 표준형: 중심의 좌표가 (a, b)이고 반지름의 길이가 r인 원

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

2. 원의 방정식의 일반형: 방정식 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$은

중심: $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$, 반지름의 길이: $\frac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2}$

인 원 (단, $A^2+B^2-4C>0$)

02 원과 직선의 위치 관계

1. 원과 직선의 위치 관계: 원과 직선의 방정식을 연립한 이차방정식의 판별식을 D, 반지름의 길이가 r인 원의 중심에서 직선까지의 거리를 d라 하면

(1) $D>0 \iff d<r \iff$ 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $D=0 \iff d=r \iff$ 한 점에서 만난다. (접한다.)

(3) $D<0 \iff d>r \iff$ 서로 만나지 않는다.

2. 공통현의 방정식: 두 원 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$, $x^2+y^2+A'x+B'y+C'=0$이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 공통현의 방정식은

$$x^2+y^2+Ax+By+C-(x^2+y^2+A'x+B'y+C')=0$$

$$\Rightarrow \quad (A-A')x+(B-B')y+(C-C')=0$$

3. 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식

두 원 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$, $x^2+y^2+A'x+B'y+C'=0$이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$x^2+y^2+Ax+By+C+k(x^2+y^2+A'x+B'y+C')=0 \quad (\text{단, } k\neq -1)$$

03 원의 접선의 방정식

1. 기울기가 주어진 원의 접선의 방정식

원 $x^2+y^2=r^2$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식: $y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$

2. 원 위의 점에서의 접선의 방정식

원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 한 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식: $x_1x+y_1y=r^2$

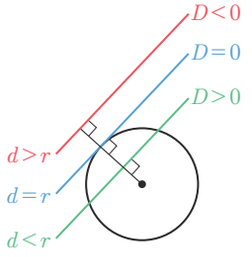
3. 원 밖의 점에서의 접선의 방정식

(1) 접점을 (x_1, y_1)으로 놓고 원 위의 점에서의 접선의 방정식을 이용한다.

(2) 기울기가 m인 직선으로 놓고 (원의 중심과 접선 사이의 거리) = (원의 반지름의 길이)를 이용한다.

마·타·노·트

▶ 원과 직선의 위치 관계

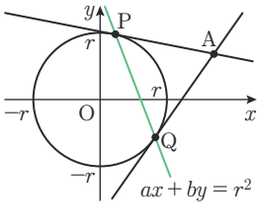


▶ 공통현의 방정식

공통현의 방정식은 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식이다. 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식에서 $k=-1$이면 공통현의 방정식이 된다.

▶ 두 접점을 지나는 직선의 방정식

원 $x^2+y^2=r^2$의 밖의 점 $A(a, b)$에서 원에 그은 접선의 두 접점 P, Q를 지나는 방정식은 $ax+by=r^2$이다. 이 직선을 원의 극선이라 한다.



394 2017학년도 09월 교육청 개념 03

좌표평면 위에 원 $C:(x-1)^2+(y-2)^2=4$와 두 점 A(4, 3), B(1, 7)이 있다. 원 C 위를 움직이는 점 P에 대하여 삼각형 PAB의 무게중심과 직선 AB 사이의 거리의 최솟값을 구하시오.

원 C 위의 점 $P(a, b)$에 대하여 삼각형 PAB의 무게중심의 좌표를 (x, y)라 하면

$$x=\frac{a+4+1}{3},\quad y=\frac{b+3+7}{3}$$

이므로

$$a=3x-5,\quad b=3y-10 \qquad \cdots ㉠$$

이다. 점 P는 원 C 위의 점이므로

$$(a-1)^2+(b-2)^2=4 \qquad \cdots ㉡$$

이다. ㉠을 ㉡에 대입하면

$$(x-2)^2+(y-4)^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

이다. 직선 AB의 방정식은 $4x+3y-25=0$이므로 삼각형 PAB의 무게중심이 그리는 원의 중심 (2, 4)와 직선 AB 사이의 거리는

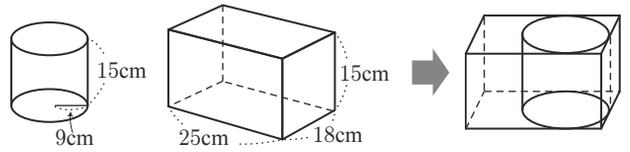
$$\frac{|8+12-25|}{\sqrt{4^2+3^2}}=1$$

이다. 구하고자 하는 거리의 최솟값은 삼각형 PAB의 무게중심이 그리는 원과 직선 AB 사이의 최단거리이므로 구하는 값은 $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$이다.

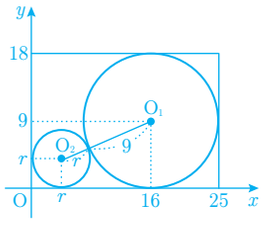
답 $\frac{1}{3}$

395 2017학년도 09월 교육청 개념 04

밑면의 반지름의 길이가 9cm이고 높이가 15cm인 원기둥 모양의 통조림통이 있다. 이 통조림통을 밑면의 가로, 세로의 길이가 각각 25cm, 18cm이고 높이가 15cm인 직육면체 모양의 상자에 담고, 상자의 남은 공간에 높이가 15cm인 원기둥 모양의 통조림통을 한개만 더 담으려고 한다. 더 담으려고 하는 통조림통의 부피의 최댓값이 $a\pi\text{cm}^3$일 때, a의 값을 구하시오. (단, 통조림통과 상자의 두께는 무시하고 통조림통의 일부가 상자 밖으로 벗어나지 않게 담는다.)



처음 상자에 담은 통조림통의 밑면의 중심을 O_1이라 하고 상자의 남은 공간에 담을 수 있는 원기둥 모양 통조림통 밑면의 중심을 O_2라 하자. 상자의 밑면의 한 꼭짓점이 원점에 오도록 좌표평면에 두면, 오른쪽 그림과 같이 두 원의 중심은 각각 $O_1(16, 9)$, $O_2(r, r)$이다.



$$\overline{O_1O_2}^2=(16-r)^2+(9-r)^2=(9+r)^2$$

이므로

$$r^2-68r+256=0 \quad\Rightarrow\quad r=4 \quad \text{또는} \quad r=64$$

이다. $r\le 9$이므로 $r=4$이다. 따라서 부피의 최댓값은

$$\pi\times 16\times 15=240\pi$$

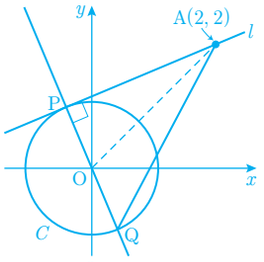
이다.

답 240

396 2017학년도 11월 교육청 개념 07

좌표평면 위에 원 $C:x^2+y^2=r^2$ $(0<r<2\sqrt{2})$와 점 A(2, 2)가 있다. 점 A에서 원 C에 그은 접선 l이 원 C와 만나는 접점을 P라 하고, 점 P를 지나고 직선 l과 수직인 직선이 원 C와 만나는 다른 한 점을 Q라 하자. 삼각형 APQ가 이등변삼각형이 되도록 하는 점 P의 좌표를 (a, b)라 할 때, ab의 값을 구하시오.

원 C의 반지름의 길이가 r이고 선분 PQ가 원 C의 지름이므로 $\overline{PQ}=2r$, $\overline{OP}=r$이다. 삼각형 APQ가 이등변삼각형이고 $\angle APQ=90°$이므로



$$\overline{PA}=2r,\quad \overline{OA}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$$

이다. 삼각형 APO에서

$$8=r^2+4r^2 \quad\Rightarrow\quad r^2=\frac{8}{5}$$

이고 점 P의 좌표가 (a, b)이므로 $a^2+b^2=\frac{8}{5}$

이다. 원 $x^2+y^2=\frac{8}{5}$ 위의 점 $P(a, b)$에서의 접선 $ax+by=\frac{8}{5}$이 점 A(2, 2)를 지나므로

$$2a+2b=\frac{8}{5} \quad\Rightarrow\quad a+b=\frac{4}{5}$$

이다.

$$2ab=(a+b)^2-(a^2+b^2)=\frac{16}{25}-\frac{8}{5}=-\frac{24}{25}$$

이므로 구하는 값은 $ab=-\frac{12}{25}$이다.

답 $-\frac{12}{25}$

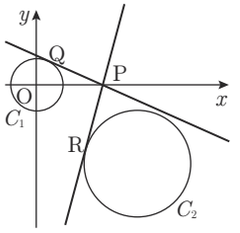
397 2015학년도 03월 교육청 개념 08

좌표평면에 두 원

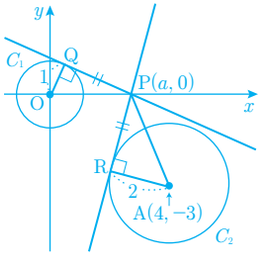
$$C_1:x^2+y^2=1$$

$$C_2:x^2+y^2-8x+6y+21=0$$

이 있다. 그림과 같이 x축 위의 점 P에서 원 C_1에 그은 한 접선의 접점을 Q, 점 P에서 원 C_2에 그은 한 접선의 접점을 R라 하자. $\overline{PQ}=\overline{PR}$일 때, 점 P의 x좌표를 구하시오.



점 P의 좌표를 $P(a, 0)$이라 하자. 직각삼각형 OPQ에서 피타고라스 정리를 이용하면



$$\overline{PQ}^2=\overline{OP}^2-\overline{OQ}^2=a^2-1$$

$x^2+y^2-8x+6y+21=0$에서

$$(x-4)^2+(y+3)^2=2^2$$

이다. 원 C_2는 중심이 (4, −3)이고 반지름의 길이가 2인 원이므로 원 C_2의 중심을 A라 하면 A(4, −3)이다. 직각삼각형 APR에서 피타고라스 정리를 이용하면

$$\overline{PR}^2=\overline{AP}^2-\overline{AR}^2=\{(a-4)^2+(0+3)^2\}-2^2=a^2-8a+21$$

이다. $\overline{PQ}=\overline{PR}$에서 $\overline{PQ}^2=\overline{PR}^2$이므로

$$a^2-1=a^2-8a+21 \quad\Rightarrow\quad 4a=11$$

에서 $a=\frac{11}{4}$이다.

답 $\frac{11}{4}$

개념치료

개념

01. 원의 방정식

398
원 $x^2+y^2+2ax+3a^2-4a-5=0$의 넓이가 최대일 때의 반지름의 길이는? (단, a는 상수이다.)

① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$
④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

주어진 원의 방정식을 표준형으로 변형하면

$$(x+a)^2+y^2=-2a^2+4a+5$$

이다. 이 원의 반지름의 길이가 최대일 때, 넓이가 최대가 된다. 즉,

$$-2a^2+4a+5=-2(a-1)^2+7$$

에서 $a=1$일 때, 원의 반지름의 길이가 최대이고 그때 반지름의 길이는 $\sqrt{7}$이다.

답 ②

399
두 점 $(-6, 0)$, $(8, 0)$으로부터 거리의 비가 4:3인 점 P가 나타내는 도형의 넓이를 구하시오.

A$(-6, 0)$, B$(8, 0)$, P(x, y)라 하면 $\overline{AP}:\overline{BP}=4:3$이므로 $3\overline{AP}=4\overline{BP}$이다. 따라서

$$3\sqrt{(x+6)^2+y^2}=4\sqrt{(x-8)^2+y^2}$$

이 성립하므로 양변을 제곱하여 정리하면

$$9\{(x+6)^2+y^2\}=16\{(x-8)^2+y^2\} \Rightarrow x^2+y^2-52x+100=0 \cdots ㉠$$

이다. ㉠을 표준형으로 변형하면

$$(x-26)^2+y^2=576$$

이므로 이 원의 넓이는 576π이다.

답 576π

400 상위 1%
좌표평면 위의 두 직선

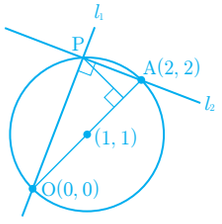
$$l_1: mx-y=0, \quad l_2: x+my-2m-2=0$$

이 있다. 모든 실수 m에 대하여 직선 l_2는 항상 점 A를 항상 지난다. 두 직선 l_1, l_2의 교점을 P라 할 때, 삼각형 OAP의 넓이의 최댓값을 구하시오. (단, 점 O는 원점이다.)

직선 l_2는 $(x-2)+(y-2)m=0$이므로 m의 값에 상관없이 항상 점 A$(2, 2)$를 지난다. 직선 l_1의 방정식은 m의 값에 상관없이 점 O$(0, 0)$을 지난다. 한편,

$$m\cdot 1+(-1)\cdot m=0$$

이므로 두 직선은 m의 값에 상관없이 수직이다. 따라서 두 직선의 교점 P는 오른쪽 그림과 같이 지름이 선분 AO인 원 위에 있다. 즉, 점 P는 중심이 $(1, 1)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원 위를 움직이므로 삼각형 OAP의 넓이의 최댓값은



$$\triangle OAP=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$$

에서 2이다.

답 2

401 중요
점 $(3, 4)$를 지나고 x축, y축에 모두 접하는 원이 2개 있다. 이 두 원의 넓이의 합을 구하시오.

x축과 y축에 모두 접하고 점 $(3, 4)$를 지나므로, 중심이 제1사분면에 있다. 따라서 원의 방정식은 반지름의 길이를 r라 하면

$$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2 \quad (\text{단, } r>0)$$

이다. 이때 점 $(3, 4)$를 지나므로

$$(3-r)^2+(4-r)^2=r^2 \Rightarrow r^2-14r+25=0$$

이 성립한다. 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=7^2-25=24>0$$

이므로 서로 다른 두 실근을 가진다. 이때 서로 다른 두 실근을 r_1, r_2라 하면, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$r_1+r_2=14, \quad r_1\cdot r_2=25$$

이므로 $r_1>0$, $r_2>0$이 성립하고 각각은 두 원의 반지름의 길이가 된다. 따라서 구하는 두 원의 넓이의 합은 다음과 같다.

$$r_1{}^2\pi+r_2{}^2\pi=\{(r_1+r_2)^2-2r_1r_2\}\pi$$
$$=\{(14)^2-2\cdot 25\}\pi=146\pi$$

답 146π

개념

02. 원과 직선의 위치 관계

402 중요
원 $x^2+y^2=8$과 직선 $y=mx-4$가 만나지 않도록 하는 실수 m의 값의 범위를 구하시오.

원과 직선이 만나지 않으면 x에 대한 이차방정식 $x^2+(mx-4)^2=8$, 즉

$$(m^2+1)x^2-8mx+8=0$$

이 서로 다른 두 허근을 가진다. 이 방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-4m)^2-8(m^2+1)=8m^2-8<0$$

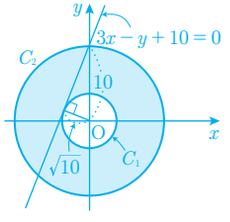
이므로 $m^2<1$에서 실수 m의 값의 범위는 $-1<m<1$이다.

답 $-1<m<1$

403
원 $x^2+y^2=r^2$이 직선 $3x-y+10=0$과 제2사분면에서 만나게 되는 양수 r의 값의 범위를 구하시오.

원 $x^2+y^2=r^2$이 직선 $3x-y+10=0$과 접할 때의 원을 C_1라 하면 원 C_1의 중심 $(0, 0)$과 직선 $3x-y+10=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이 r와 같으므로

$$r=\frac{|10|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$$



에서 원 C_1의 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$이다. 또한, 직선 $3x-y+10=0$은 점 $(0, 10)$을 지나므로 원 $x^2+y^2=r^2$이 점 $(0, 10)$을 지날 때의 원을 C_2라 하면 $10^2=r^2$에서 원 C_2의 반지름의 길이는 $r=10$이다. 따라서 제2사분면에서 주어진 원과 직선이 만날 때, r의 값의 범위는 그림과 같이 $\sqrt{10}\le r<10$이다.

답 $\sqrt{10}\le r<10$

개념

03. 원 밖의 점과 원 위의 점 사이의 거리

404 중요

원 $x^2+y^2=16$ 위의 한 점과 직선 $4x-3y+k=0$ 사이의 거리의 최댓값이 12일 때, 양수 k의 값을 구하시오.

원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $4x-3y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|k|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{|k|}{5}$$

이다. 원의 반지름의 길이는 4이므로 원 위의 한 점과 직선 사이의 거리의 최댓값은

$$\frac{|k|}{5}+4=12 \quad \Rightarrow \quad |k|=40$$

에서 양수 k의 값은 40이다.

답 40

405

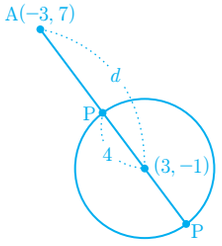
점 $\mathrm{A}(-3, 7)$과 원 $x^2+y^2-6x+2y-6=0$ 위의 점 P 사이의 거리가 자연수인 점 P의 개수를 구하시오.

주어진 원의 방정식을 표준형으로 변형하면

$$(x-3)^2+(y+1)^2=16$$

이므로 중심이 $(3, -1)$이고 반지름의 길이를 r라 하면 $r=4$이다. 이 원의 중심과 점 A 사이의 거리를 d라 하면

$$d=\sqrt{(-3-3)^2+(7+1)^2}=10$$



이므로 선분 AP의 길이의 최솟값은 $d-r=10-4=6$이고, 최댓값은 $d+r=10+4=14$이다.
따라서 점 A와 주어진 원 위의 점 P 사이의 거리는 6 이상 14 이하이다. 이때,
(i) $7 \le \overline{\mathrm{AP}} \le 13$인 점 P는 각각 2개이므로 총 14개이다.
(ii) $\overline{\mathrm{AP}}=6$, 14인 점 P는 각각 1개이므로 총 2개이다.
(i), (ii)에 의하여 조건을 만족하는 점 P의 개수는 16개이다.

답 16

406

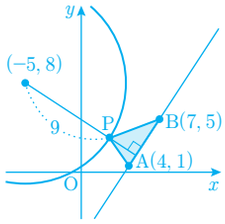
원 $x^2+y^2+10x-16y+8=0$ 위의 점 P와 두 점 $\mathrm{A}(4, 1)$, $\mathrm{B}(7, 5)$에 대하여 삼각형 PAB의 넓이의 최솟값을 구하시오.

삼각형 PAB의 밑변을 선분 AB로 놓으면

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(7-4)^2+(5-1)^2}=5$$

이고 삼각형 PAB의 높이는 점 P와 선분 AB 사이의 거리이다. 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식을 구하면

$$y-1=\frac{5-1}{7-4}(x-4) \quad \Rightarrow \quad 4x-3y-13=0$$



이다. 또한, 주어진 원 $x^2+y^2+10x-16y+8=0$을 표준형으로 변형하면 $(x+5)^2+(y-8)^2=81$이므로 중심이 $(-5, 8)$이고 반지름의 길이가 9인 원이다. 이 원의 중심 $(-5, 8)$과 직선 AB 사이의 거리를 구하면

$$\frac{|-20-24-13|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{57}{5}$$

이다. 삼각형 PAB의 넓이가 최소가 될 때는 삼각형 PAB의 높이가 최소일 때므로, 삼각형 PAB의 높이가 주어진 원과 직선 AB 사이의 거리의 최솟값인 $\frac{57}{5}-9=\frac{12}{5}$일 때이다. 따라서 삼각형 PAB의 넓이의 최솟값은 $\triangle \mathrm{PAB}=\frac{1}{2}\times 5\times \frac{12}{5}=6$이다.

답 6

개념

04. 두 원의 위치 관계

407 중요

원 $(x-4)^2+(y+1)^2=r^2$이 원 $(x-1)^2+(y-3)^2=81$의 내부에 있을 때, 이를 만족시키는 자연수 r의 최댓값을 구하시오.

한 원이 다른 원의 내부에 있으면 두 원의 중심 사이의 거리가 두 원의 반지름의 길이의 차보다 작다. 두 원의 중심은 각각 $(4, -1)$, $(1, 3)$이므로 중심 사이의 거리를 d라 하면

$$d=\sqrt{(1-4)^2+(3+1)^2}=5$$

이고, 두 원의 반지름의 길이는 각각 r, 9이다. 따라서

$$5<|9-r|$$

이다. 이때, 큰 원의 반지름의 길이가 9이므로 $r<9$이다. 그러므로

$$5<9-r \quad \Rightarrow \quad r<4$$

에서 자연수 r의 최댓값은 3이다.

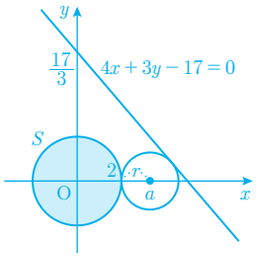
답 3

408

원 $S: x^2+y^2=4$에 외접하고 직선 $4x+3y-17=0$에 접하는 원 중에서 그 중심이 x축의 양의 방향 위에 있는 도형의 방정식을 구하시오.

중심이 x축 위에 있으므로 구하는 원의 중심의 좌표를 $(a, 0)$ (단, $a>0$)이라 하고 반지름의 길이를 r라 하면

$$(x-a)^2+y^2=r^2 \qquad \cdots ㉠$$



이다. 이 원 ㉠과 원 S가 외접하므로 $a=2+r$이다. 또한, 원 ㉠이 직선 $4x+3y-17=0$에 접하므로 원 ㉠의 중심 $(a, 0)$과 직선 $4x+3y-17=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이 r와 같다.

$$\frac{|4a-17|}{\sqrt{4^2+3^2}}=r \quad \Rightarrow \quad |4a-17|=5r$$

에서 $r=a-2$이므로 대입하면 $|4a-17|=5a-10$이다. 방정식을 풀면 $a=-7$ 또는 $a=3$인데 a는 양수이므로 $a=3$이고, $r=1$이다. 따라서 구하는 도형의 방정식은 $(x-3)^2+y^2=1$이다.

답 $(x-3)^2+y^2=1$

개념

05. 공통현의 방정식

409 중요

두 원 $x^2+y^2=56$, $x^2+y^2-4x+6y-4=0$의 공통현의 중점의 좌표를 구하시오.

두 원의 공통현의 방정식을 구하면

$$(x^2+y^2-56)-(x^2+y^2-4x+6y-4)=0$$

$$\Rightarrow \quad 4x-6y-52=0 \qquad \cdots ㉠$$

이다. 또한, 두 원의 중심의 좌표가 각각 $(0, 0)$, $(2, -3)$이므로 두 점을 지나는 직선의 방정식은

$$y-0=\frac{-3-0}{2-0}(x-0) \quad \Rightarrow \quad y=-\frac{3}{2}x \qquad \cdots ㉡$$

이다. 두 원의 중심을 지나는 직선이 공통현을 수직이등분하므로 두 직선 ㉠, ㉡의 교점이 공통현의 중점이다. 따라서 식 ㉠과 ㉡을 연립하여 풀면 $x=4$, $y=-6$이다. 즉, 두 원의 공통현의 중점의 좌표는 $(4, -6)$이다.

답 $(4, -6)$

410

두 원 $S: x^2+y^2=16$, $T: x^2+y^2-6x+8y+k=0$의 공통현의 길이가 $4\sqrt{3}$이 되도록 하는 양수 k의 값을 구하시오.

두 원의 공통현의 방정식은

$$(x^2+y^2-16)-(x^2+y^2-6x+8y+k)=0$$

$$\Rightarrow \quad 6x-8y-k-16=0 \qquad \cdots \text{㉠}$$

이다. 두 원 S, T의 중심을 잇는 직선은 공통현을 수직이등분한다. 따라서 두 원의 교점 중 한 점을 A라 하고, 공통현의 중점을 M이라 하면 삼각형 OAM은 직각삼각형이고 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{OA}^2-\overline{AM}^2=\overline{OM}^2$$

이 성립한다. 선분 OA는 원 $S: x^2+y^2=16$의 반지름이므로 길이가 4이고 선분 AM의 길이는 공통현의 길이의 $\frac{1}{2}$이므로 $2\sqrt{3}$이다. 따라서 $\overline{OM}=2$이다. 한편, 선분 OM은 점 O와 공통현 ㉠ 사이의 거리이므로

$$\overline{OM}=\frac{|-k-16|}{\sqrt{6^2+8^2}}=\frac{|k+16|}{10}$$

이다. 따라서 $|k+16|=20$이므로 양수 k의 값은 40이다.

답 40

411

두 원 $C_1: x^2+y^2-2x+4y+4=0$, $C_2: (x+a)^2+y^2=4+a^2$이 서로 다른 두 점에서 만난다. 두 교점 사이의 거리가 최대일 때, 실수 a의 값을 구하시오.

원 C_1을 표준형으로 변형하면 $(x-1)^2+(y+2)^2=1$이므로 중심이 $(1, -2)$이고 반지름의 길이가 1인 원이다. 두 원 C_1, C_2의 공통현의 방정식을 구하면

$$x^2+y^2-2x+4y+4-(x^2+2ax+y^2-4)=0$$

$$\Rightarrow \quad (a+1)x-2y-4=0 \qquad \cdots \text{㉠}$$

이다. 이때, 원 C_1의 중심 $(1, -2)$와 공통현 ㉠ 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|(a+1)\cdot 1+(-2)\cdot(-2)-4|}{\sqrt{(a+1)^2+(-2)^2}}=\frac{|a+1|}{\sqrt{(a+1)^2+4}}$$

이다. 두 원의 교점 중 하나를 A라 하고, 공통현의 중점을 M이라 하면 피타고라스 정리에 의하여

$$2\overline{AM}=2\sqrt{1-d^2}=2\sqrt{\frac{4}{(a+1)^2+4}}$$

이다. $(a+1)^2+4$의 값이 최소일 때, 두 원 C_1, C_2의 두 교점 사이의 거리가 최대가 된다. 이때 a의 값은 -1이다.

답 -1

개념

06. 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식

412 중요

두 원 $x^2+y^2-10x-6y+9=0$, $x^2+y^2+2x-9=0$의 교점과 점 $(2, 5)$를 지나는 원의 넓이를 구하시오.

주어진 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$(x^2+y^2-10x-6y+9)+k(x^2+y^2+2x-9)=0 \quad (\text{단, } k\neq -1) \qquad \cdots \text{㉠}$$

이다. 원 ㉠이 점 $(2, 5)$를 지나므로 ㉠에 대입하면

$$(2^2+5^2-10\cdot 2-6\cdot 5+9)+k(2^2+5^2+2\cdot 2-9)=0 \quad \Rightarrow \quad 24k=12$$

에서 $k=\frac{1}{2}$이다. $k=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하여 표준형으로 정리하면

$$(x^2+y^2-10x-6y+9)+\frac{1}{2}(x^2+y^2+2x-9)=0 \quad \Rightarrow \quad (x-3)^2+(y-2)^2=10$$

이다. 따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$이므로 그 넓이는 10π이다.

답 10π

413 상위1%

두 원 $x^2+y^2-9=0$, $x^2+y^2+6x+2y-19=0$의 교점을 지나고, y축에 접하는 원의 반지름의 길이를 구하시오.

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은 $k\neq -1$인 실수 k에 대하여

$$x^2+y^2+6x+2y-19+k(x^2+y^2-9)=0$$

$$\Rightarrow \quad (k+1)x^2+(k+1)y^2+6x+2y-9k-19=0 \qquad \cdots \text{㉠}$$

로 나타낼 수 있다. 이때 원 ㉠이 y축에 접하므로 원 ㉠과 직선 $x=0$의 교점이 1개뿐이다. 따라서 $x=0$을 원 ㉠에 대입하면

$$(k+1)y^2+2y-9k-19=0$$

이고 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=1-(k+1)(-9k-19)=9k^2+28k+20$$

$$=(10k+9)(k+2)=0$$

에서 $k=-\frac{10}{9}$ 또는 $k=-2$이다. ㉠에 대입하면 각각

$$(x-27)^2+(y-9)^2=27^2, \quad (x-3)^2+(y-1)^2=3^2$$

이다. 따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 3 또는 27이다.

답 3 또는 27

414

원 $x^2+y^2=64$와 직선 $x-y-6=0$의 교점을 지나고 반지름이 $\sqrt{46}$인 원의 중심의 좌표를 구하시오.

구하는 원의 방정식은 주어진 원과 직선의 교점을 지나는 원의 방정식이므로 실수 k에 대하여

$$x^2+y^2-64+k(x-y-6)=0$$

라 나타낼 수 있다. 원의 방정식의 표준형으로 나타내면

$$\left(x+\frac{k}{2}\right)^2+\left(y-\frac{k}{2}\right)^2=\frac{k^2}{2}+6k+64 \qquad \cdots \text{㉠}$$

이다. 이때, $\frac{k^2}{2}+6k+64=(\sqrt{46})^2$이므로

$$k^2+12k+36=0 \quad \Rightarrow \quad (k+6)^2=0$$

에서 $k=-6$이다. 따라서 구하는 원의 중심은 ㉠에 $k=-6$을 대입하면 $(3, -3)$이다.

답 $(3, -3)$

개념

07. 원 위의 점 또는 기울기가 주어진 원의 접선의 방정식

415

원 $x^2+y^2-6=0$에 접하고 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $60°$인 접선의 방정식을 구하시오.

x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $60°$인 접선의 기울기는

$$\tan 60°=\sqrt{3}$$

이다. 즉, 기울기가 $\sqrt{3}$이고 원 $x^2+y^2=6$에 접하는 직선의 방정식은

$$y=\sqrt{3}x\pm\sqrt{6}\sqrt{\sqrt{3}^2+1} \quad \Rightarrow \quad y=\sqrt{3}x\pm 2\sqrt{6}$$

에서 $y=\sqrt{3}x+2\sqrt{6}$ 또는 $y=\sqrt{3}x-2\sqrt{6}$이다.

답 $y=\sqrt{3}x+2\sqrt{6}$ 또는 $y=\sqrt{3}x-2\sqrt{6}$

416

두 원 $x^2+y^2=1$, $(x-2)^2+(y-2)^2=13$이 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 두 점 A, B에서 원 $x^2+y^2=1$에 그은 두 접선의 교점의 좌표를 구하시오.

두 원의 교점 A, B를 지나는 직선의 방정식은

$$(x^2+y^2-1)-\{(x-2)^2+(y-2)^2-13\}=0$$

에서 식을 정리하면 $x+y+1=0$이다. 직선 $x+y+1=0$과 원 $x^2+y^2=1$을 연립하여 풀면

$$x^2+(-x-1)^2=1 \quad \Rightarrow \quad x^2+x=x(x+1)=0$$

에서 직선과 원의 교점의 x좌표는 0 또는 -1이다. 즉, 두 점 A, B의 좌표는 각각 $(0, -1)$, $(-1, 0)$이다. 점 $(0, -1)$에서의 접선의 방정식은 $-1y=1$에서 $y=-1$이고 $(-1, 0)$에서의 접선의 방정식은 $-x=1$에서 $x=-1$이다. 따라서 두 접선의 교점의 좌표는 $(-1, -1)$이다.

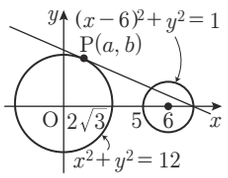
답 $(-1, -1)$

417 중요

오른쪽 그림과 같이 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점 $P(a, b)$에서의 접선이 원

$$(x-6)^2+y^2=1$$

과 서로 다른 두 점에서 만날 때, a의 값의 범위를 구하시오.



원 $x^2+y^2=9$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식은 $ax+by=9$이다. 이 접선이 원 $(x-6)^2+y^2=1$과 서로 다른 두 점에서 만날 때, 원의 중심 $(6, 0)$과 직선 $ax+by=9$ 사이의 거리가 반지름의 길이 1보다 작아야 한다. 즉,

$$\frac{|6a-9|}{\sqrt{a^2+b^2}}<1 \qquad \cdots \text{㉠}$$

이다. 점 P가 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점이므로 $a^2+b^2=9$이다. 이를 ㉠에 대입하면

$$|6a-9|<3 \quad \Rightarrow \quad 1<a<2$$

이므로 $1<a<2$이다.

답 $1<a<2$

418

두 원 $C_1: x^2+y^2=1$, $C_2: x^2+(y-2)^2=4$의 공통접선의 방정식을 구하시오.

공통접선의 방정식을 $y=ax+b$ (단, a, b는 실수)라 하면 원 C_1의 중심 $(0, 0)$과 직선 $ax-y+b=0$ 사이의 거리는 반지름의 길이 1과 같으므로

$$1=\frac{|b|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}} \quad \Rightarrow \quad b^2=a^2+1 \qquad \cdots \text{㉠}$$

이다. 또한, 원 C_2의 중심 $(0, 2)$와 직선 $ax-y+b=0$ 사이의 거리는 반지름의 길이 2와 같으므로

$$2=\frac{|-2+b|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}} \quad \Rightarrow \quad b^2-4b=4a^2 \qquad \cdots \text{㉡}$$

이다. ㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$3b^2+4b-4=(3b-2)(b+2)=0$$

에서 $b=\frac{2}{3}$ 또는 $b=-2$이다.

(i) $b=\frac{2}{3}$일 때, ㉠에서 $a^2=-\frac{5}{9}$로 이를 만족하는 실수 a는 없다.

(ii) $b=-2$일 때, $a=\pm\sqrt{3}$이다.

(i), (ii)에서 $a=\pm\sqrt{3}$, $b=-2$이므로 구하는 공통접선의 방정식은 $y=\sqrt{3}x-2$ 또는 $y=-\sqrt{3}x-2$이다.

답 $y=\sqrt{3}x-2$ 또는 $y=-\sqrt{3}x-2$

개념

08. 원 밖의 점에서의 접선의 방정식

419 중요

원 밖의 점 $A(0, a)$에서 원 $(x+4)^2+(y-2)^2=8$에 그은 접선이 원과 만나는 접점이 P이고, $\overline{AP}=6$일 때, 모든 실수 a의 값의 곱을 구하시오.

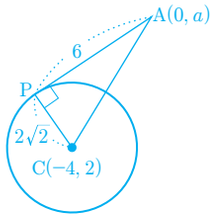
원의 중심을 $C(-4, 2)$라 하면 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{AP}^2+\overline{CP}^2=\overline{AC}^2$$

이 성립한다. 또한, $\overline{AP}=6$이고 선분 CP의 길이는 원의 반지름의 길이이므로

$$6^2+\sqrt{8}^2=\sqrt{(-4-0)^2+(2-a)^2}^2$$

$$\Rightarrow \quad a^2-4a-24=0$$



이다. a에 대한 이차방정식 $a^2-4a-24=0$의 판별식을 D라 하면 $D>0$이므로 모든 실수 a의 값의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 -24이다.

답 -24

420 상위 1%

점 $(5, 3)$에서 원 $(x-2)^2+(y-2)^2=5$에 그은 두 접선과 x축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 구하시오.

원의 접선이 점 $(5, 3)$을 지나므로 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$$y-3=m(x-5) \quad \Rightarrow \quad mx-y-5m+3=0 \qquad \cdots \text{㉠}$$

이다. 이 직선과 원의 중심 $(2, 2)$ 사이의 거리가 반지름의 길이 $\sqrt{5}$와 같으므로

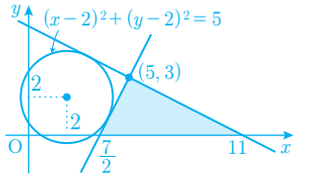
$$\frac{|m\cdot 2-2-5m+3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad |-3m+1|=\sqrt{5m^2+5}$$

이다. 양변을 제곱하여 풀면

$$(-3m+1)^2=5m^2+5 \quad \Rightarrow \quad (2m+1)(m-2)=0$$

에서 $m=-\frac{1}{2}$ 또는 $m=2$이다. ㉠에 각각 대입하면 점 $(5, 3)$에서 원 $(x-2)^2+(y-2)^2=5$에 그은 두 접선은 $x+2y-11=0$ 또는 $2x-y-7=0$이다. 두 직선의 x절편은 각각 11, $\frac{7}{2}$이므로 두 직선과 x축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는 다음과 같다.

$$\frac{1}{2}\times\left(11-\frac{7}{2}\right)\times 3=\frac{45}{4}$$



답 $\frac{45}{4}$

421

점 P에서 두 원

$$(x+2)^2+(y-1)^2=1, \quad (x-3)^2+(y+1)^2=4$$

에 그은 접선이 두 원과 만나는 접점을 각각 Q, R라 하자. $\overline{PQ}=\overline{PR}$일 때, 점 P가 그리는 도형의 방정식을 구하시오.

원 $(x+2)^2+(y-1)^2=1$의 중심을 A$(-2, 1)$이라 하고, 원 $(x-3)^2+(y+1)^2=4$의 중심을 B$(3, -1)$이라 하자. 이때 점 P의 좌표를 (a, b)라 하면

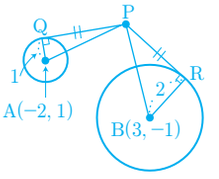
$$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{PA}^2-1^2}, \quad \overline{PR}=\sqrt{\overline{PB}^2-2^2}$$

이다. $\overline{PQ}=\overline{PR}$에서 $\overline{PQ}^2=\overline{PR}^2$이므로

$$(a+2)^2+(b-1)^2-1=(a-3)^2+(b+1)^2-4$$

$$\Rightarrow \quad 5a-2b-1=0$$

이 성립한다. 따라서 구하는 도형의 방정식은 $5x-2y-1=0$이다.



답 $5x-2y-1=0$

422

원 $x^2+y^2=1$ 밖의 점 $\mathrm{A}(a, b)$에서 원에 그은 두 접선의 기울기의 곱이 -3일 때, a, b 사이의 관계식을 구하시오. (단, $a^2+b^2>1$이다.)

기울기가 m인 원 $x^2+y^2=1$에 접하는 접선의 방정식은

$$y=mx\pm1\cdot\sqrt{m^2+1}$$

이다. 이때 접선이 점 $\mathrm{A}(a, b)$를 지나므로 $b=ma\pm\sqrt{m^2+1}$이고 양변을 제곱하여 정리하면

$$m^2+1=(b-ma)^2 \quad \Rightarrow \quad (a^2-1)m^2-2abm+b^2-1=0 \qquad \cdots ㉠$$

이다. $a^2+b^2>1$에서 $a^2\neq1$이고 m에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(ab)^2-(a^2-1)(b^2-1)=a^2+b^2-1>0$$

이므로 서로 다른 두 실근을 가진다. 두 접선의 기울기의 곱이 -3이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{b^2-1}{a^2-1}=-3 \quad \Rightarrow \quad 3a^2+b^2=4$$

답 $3a^2+b^2=4$

423

원 $x^2+y^2=37$과 점 $\mathrm{P}(2, -1)$을 지나는 직선이 두 점 A, B에서 만나고 $\overline{\mathrm{PA}}=2\overline{\mathrm{PB}}$일 때, 직선 AB의 방정식을 모두 구하시오.

점 P와 원의 중심 $(0, 0)$을 지나는 직선이 원과 만나는 두 점을 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{OC}}=\overline{\mathrm{OD}}=\sqrt{37}$이고

$$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(2-0)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{5}$$

이다. 원의 성질에 의하여 $\overline{\mathrm{PA}}\cdot\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PC}}\cdot\overline{\mathrm{PD}}$이므로

$$2\overline{\mathrm{PB}}\cdot\overline{\mathrm{PB}}=(\overline{\mathrm{OC}}-\overline{\mathrm{OP}})(\overline{\mathrm{OD}}+\overline{\mathrm{OP}}) \ (\because\overline{\mathrm{PA}}=2\overline{\mathrm{PB}})$$

$$2\overline{\mathrm{PB}}^2=(\sqrt{37}-\sqrt{5})(\sqrt{37}+\sqrt{5})=32$$

에서 $\overline{\mathrm{PB}}=4$, $\overline{\mathrm{PA}}=8$이다. 즉, $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}=12$이다. 직선 AB의 기울기를 m이라 하면 이 직선은 점 $\mathrm{P}(2, -1)$을 지나므로

$$y+1=m(x-2) \quad \Rightarrow \quad mx-y-2m-1=0 \qquad \cdots ㉡$$

이다. 원점과 직선 AB 사이의 거리를 d라 하면 피타고라스 정리에 의하여

$$d=\sqrt{(\sqrt{37})^2-\left(\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{2}\right)^2}=\sqrt{37-36}=1$$

이고 원점 $(0, 0)$과 직선 $mx-y-2m-1=0$ 사이의 거리는

$$d=\frac{|2m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$$

이므로 양변을 제곱하여 정리하면

$$3m^2+4m=0 \quad \Rightarrow \quad m(3m+4)=0$$

에서 $m=0$ 또는 $m=-\frac{4}{3}$이다. ㉡에 대입하면 직선 AB의 방정식은 $y=-1$ 또는 $y=-\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}$이다.

답 $y=-1$ 또는 $y=-\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}$

424 마타

x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases}x^2+y^2=k\\x^4+2y^4=2\end{cases}$가 적어도 한 쌍의 실근을 가질 때, 상수 k의 값의 범위를 구하시오.

$x^2=p$, $\sqrt{2}y^2=q$로 놓으면 $p\geq0$, $q\geq0$이고, $\begin{cases}p+\frac{q}{\sqrt{2}}=k & \cdots ㉠\\p^2+q^2=2 & \cdots ㉡\end{cases}$ 이다.

k는 직선 $p+\frac{q}{\sqrt{2}}=k$의 y절편이므로 원 $p^2+q^2=2$와 직선 $p+\frac{q}{\sqrt{2}}=k$가 $p\geq0$, $q\geq0$에서 만나는 경우, k의 최솟값과 최댓값은 다음과 같다.

(i) 직선 $p+\frac{q}{\sqrt{2}}=k$가 점 $(0, \sqrt{2})$를 지날 때,

$$0+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=k \quad \Rightarrow \quad k=1$$

(ii) 직선 $p+\frac{q}{\sqrt{2}}=k$가 원 $p^2+q^2=2$와 접할 때,

$q=\sqrt{2}(k-p)$를 원의 방정식 $p^2+q^2=2$에 대입하면

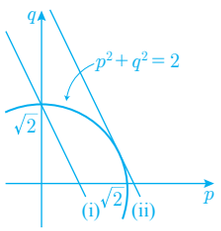
$$p^2+2(k-p)^2=2 \quad \Rightarrow \quad 3p^2-4kp+2k^2-2=0$$

p에 대한 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=4k^2-3\cdot(2k^2-2)=-2k^2+6=0$$

에서 $k>0$이므로 $k=\sqrt{3}$이다.

(i), (ii)에서 구하는 k의 값의 범위는 $1\leq k\leq\sqrt{3}$이다.



답 $1\leq k\leq\sqrt{3}$

425 마타

두 원 $O: x^2+y^2-2y=0$, $O': x^2+y^2-4x+4ay+5=0$의 교점과 점 $(1, 0)$을 지나는 원의 넓이가 25π일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은 $k\neq-1$인 실수 k에 대하여

$$(x^2+y^2-4x+4ay+5)+k(x^2+y^2-2y)=0 \qquad \cdots ㉠$$

이다. 이 원이 점 $(1, 0)$을 지나므로 ㉠에 대입하면 $k=-2$이다. $k=-2$를 ㉠에 대입하여 정리하면

$$(x^2+y^2-4x+4ay+5)-2(x^2+y^2-2y)=0$$

$$\Rightarrow \quad (x+2)^2+(y-2a-2)^2=9+4(a+1)^2 \qquad \cdots ㉡$$

이다. 원 ㉡의 넓이가 25π이므로

$$9+4(a+1)^2=25 \quad \Rightarrow \quad (a+1)^2=4$$

에서 $a=-3$ 또는 $a=1$이다. 두 원 O, O'의 방정식을 각각 표준형으로 변형하면

$$O: x^2+(y-1)^2=1, \quad O': (x-2)^2+(y+2a)^2=4a^2-1$$

이므로 중심이 각각 $(0, 1)$, $(2, -2a)$이고 반지름의 길이가 각각 1, $\sqrt{4a^2-1}$이다. 이때, 두 원 O, O'의 중심 사이의 거리 d는

$$d=\sqrt{(2-0)^2+(-2a-1)^2}=\sqrt{4a^2+4a+5}$$

이다. 이때, 두 원 O, O'은 서로 다른 두 점에서 만나야 한다. a의 값에 따라 두 원 O, O'의 위치 관계를 살펴보면

(i) $a=-3$일 때, 반지름의 길이는 각각 1, $\sqrt{35}$이고, $d=\sqrt{29}$이므로 $\sqrt{35}-1<d<\sqrt{35}+1$이 성립한다. 즉, 두 원 O, O'은 서로 다른 두 점에서 만난다.

(ii) $a=1$일 때, 반지름의 길이는 각각 1, $\sqrt{3}$이고, $d=\sqrt{13}$이므로 $d>1+\sqrt{3}$이 성립한다. 즉, 두 원 O, O'은 서로 만나지 않는다.

따라서 (i), (ii)에 의하여 $a=-3$일 때, 주어진 조건을 만족한다.

답 -3

서 술 형

• 풀이 과정에 점수가 부여되니 풀이 과정 및 정답을 상세하게 서술하세요.

426

직선 $y=x$ 위의 점 P에서 원 $x^2+y^2-2x+4y+3=0$에 그은 접선과의 접점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이의 최솟값을 구하시오.

주어진 원의 방정식을 표준형으로 변형하면

$$(x-1)^2+(y+2)^2=2$$

이므로 중심이 $(1, -2)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이다. [10%]

원의 중심을 C라 하면 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{PC}^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{\overline{PC}^2-2}$$

이다. [30%]

따라서 선분 PC의 길이가 최소일 때, 선분 PQ의 길이가 최소가 된다. 선분 PC의 길이의 최솟값은 점 $C(1, -2)$와 직선 $x-y=0$ 사이의 거리와 같다. 즉,

$$\frac{|1-(-2)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

일 때이다. [30%]

따라서 선분 PQ의 길이의 최솟값은

$$\sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2-2}=\sqrt{\frac{5}{2}}$$

에서 $\frac{\sqrt{10}}{2}$이다. [30%]

답 $\frac{\sqrt{10}}{2}$

427

점 $P(-2, 4)$에서 원 $x^2+y^2=4$에 그은 두 접선의 접점을 각각 A, B라 할 때, 삼각형 PAB의 넓이를 구하시오.

점 P에서 원 $x^2+y^2=4$에 그은 접선의 기울기를 m이라 하면 방정식은

$$y-4=m(x+2) \quad \Rightarrow \quad y=mx+2m+4$$

이다. 원의 중심 $(0, 0)$과 접선 사이의 거리가 반지름의 길이 2와 같으므로

$$2=\frac{|2m+4|}{\sqrt{m^2+1}} \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{m^2+1}=|2m+4|$$

이 성립한다. 양변을 제곱하여 정리하면 $m=-\frac{3}{4}$

이다. 즉, 점 P에서 원 $x^2+y^2=4$에 그은 접선의 방정식은 $y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{2}$이다. [30%]

한편, 원 $x^2+y^2=4$와 점 $P(-2, 4)$를 좌표평면에 나타내면 원 $x^2+y^2=4$가 $(-2, 0)$을 지나므로 원 밖의 점 P에서 그은 접선 중 하나는 $x=-2$임을 알 수 있다.

따라서 점 P에서 원 $x^2+y^2=4$에 그은 두 접선의 방정식은 $x=-2$, $y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{2}$

이다. [20%]

점 $A(-2, 0)$이라 놓고, 나머지 접점을 B라 하고 점 A에서 직선 PB에 즉, 직선 $3x+4y-10=0$에 내린 수선의 발을 C라 하자. 선분 AC의 길이는

$$\overline{AC}=\frac{|-6-10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{16}{5}$$

이다. [20%]

삼각형 PAB의 넓이는

$$\triangle PAB=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{PB} \quad \cdots ㉠$$

이다. 이때, 원의 접선은 원과 수직으로 만나므로 삼각형 OBP는 직각삼각형이다. 즉, 피타고라스 정리에 의하여 $\overline{OP}^2=\overline{PB}^2+\overline{OB}^2$이 성립한다. $\overline{OB}=2$이고, $\overline{OP}=\sqrt{(-2)^2+4^2}=2\sqrt{5}$이므로 $\overline{PB}^2=20-4=16$에서 $\overline{PB}=4$이고 삼각형 PAB의 넓이는 ㉠에서 $\frac{1}{2}\times\frac{16}{5}\times4=\frac{32}{5}$이다. [30%]

답 $\frac{32}{5}$

428 단계형

세 점 $O(0, 0)$, $A(4, 0)$, $B(0, 1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB에서 변 OA 위의 한 점 P와 변 OB 위에

$$\overline{OQ}:\overline{QB}=\overline{AP}:\overline{PO}$$

를 만족하는 점 Q에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) 점 Q를 $(0, t)$라 할 때, P의 좌표를 구하시오.

(2) 삼각형 OPQ의 외접원의 방정식을 구하시오.

(3) 원점을 제외한 삼각형 OPQ의 외접원의 방정식이 항상 지나는 점을 구하시오.

(1) 선분 OB 위의 점 Q의 좌표를 $(0, t)$ (단, $0<t<1$)이라 하면

$$\overline{AP}:\overline{PO}=1:(1-t) \quad \Rightarrow \quad \overline{OP}:\overline{PA}=(1-t):t$$

이므로 점 P는 선분 OA를 $(1-t):t$로 내분하는 점이고 점 P의 좌표는 $(4(1-t), 0)$이다.

(2) 삼각형 OPQ는 직각삼각형이므로 외접원의 중심은 선분 PQ의 중점이다. 선분 PQ의 중점을 M이라 하면 $M\left(2(1-t), \frac{t}{2}\right)$이고 반지름의 길이는 $\overline{OM}$이다.

이때, 삼각형 OPQ의 외접원의 원의 방정식은

$$\{x-2(1-t)\}^2+\left(y-\frac{t}{2}\right)^2=4(1-t)^2+\frac{t^2}{4}$$

$$\Rightarrow \quad x^2+y^2-4x+t(4x-y)=0$$

(3) 삼각형 OPQ의 외접원의 원의 방정식 $x^2+y^2-4x+t(4x-y)=0$은 t의 값에 관계없이 원 $x^2+y^2-4x=0$과 직선 $y=4x$의 교점을 지난다. 두 식을 연립하여 풀면

$$x^2+(4x)^2-4x=17x^2-4x=x(17x-4)=0$$

이므로 점 O$(0, 0)$ 이외에 점 $R\left(\frac{4}{17}, \frac{16}{17}\right)$을 항상 지난다.

답 (1) $P(4-4t, 0)$ (2) $x^2+y^2-4x+t(4x-y)=0$ (3) $R\left(\frac{4}{17}, \frac{16}{17}\right)$

13 도형의 이동

01 평행이동

x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면

1. **점**: $\mathrm{P}(x, y) \longrightarrow \mathrm{P}'(x+a, y+b)$

2. **도형**: $f(x, y)=0 \longrightarrow f(x-a, y-b)=0$

02 대칭이동

1. 점 (x, y)와 도형 $f(x, y)=0$을 대칭이동하면 다음과 같다.

대칭이동	(x, y)	$f(x, y)=0$
x축	$(x, -y)$	$f(x, -y)=0$
y축	$(-x, y)$	$f(-x, y)=0$
원점	$(-x, -y)$	$f(-x, -y)=0$
$y=x$	(y, x)	$f(y, x)=0$
$y=-x$	$(-y, -x)$	$f(-y, -x)=0$

2. **점 (a, b)에 대한 대칭이동**

점 P를 점 $\mathrm{A}(a, b)$에 대하여 대칭이동한 점을 P′이라 하면 점 A는 선분 PP′의 **중점**임을 이용한다.

3. **직선 $x=a$, 직선 $y=b$에 대한 대칭이동**

(1) 직선 $x=a$에 대한 대칭이동: 점 $\mathrm{P}(x, y)$를 직선 $x=a$에 대하여 대칭이동한 점을 P′이라 하면 점 (a, y)는 선분 PP′의 **중점**임을 이용한다.

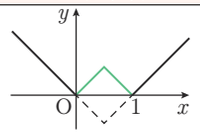
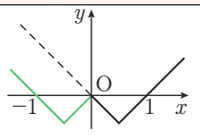
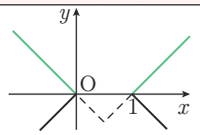
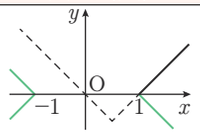
(2) 직선 $y=b$에 대한 대칭이동: 점 $\mathrm{P}(x, y)$를 직선 $y=b$에 대하여 대칭이동한 점을 P″이라 하면 점 (x, b)는 선분 PP′의 **중점**임을 이용한다.

03 절댓값 기호를 포함한 식의 그래프

절댓값 기호 안의 식이 **0이 되는 값**을 기준으로 범위를 나누어 그린다. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽과 같을 때, 네 그래프

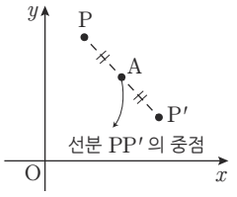
$$y=|f(x)|, \quad y=f(|x|), \quad |y|=f(x), \quad |y|=f(|x|)$$

를 각각 좌표평면에 나타내는 방법과 그 결과는 다음과 같다.

$y=\lvert f(x)\rvert$	$y=f(\lvert x\rvert)$	$\lvert y\rvert=f(x)$	$\lvert y\rvert=f(\lvert x\rvert)$
			
$f(x)\le 0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동	$x\ge 0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동	$y\ge 0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동	$x\ge 0$, $y\ge 0$인 부분을 x축, y축, 원점 대칭이동

마·타·노·트

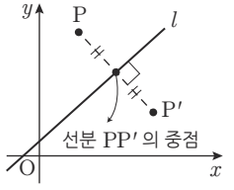
▶ **점 A에 대한 대칭이동**



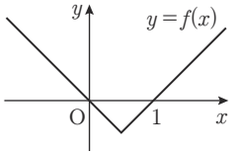
▶ **직선 $y=ax+b$에 대한 대칭이동**

점 P를 직선 l에 대하여 대칭이동한 점 P′은 다음 두 조건을 이용하여 구한다.

1. 선분 PP′의 중점은 직선 l 위의 점이다.
2. 선분 PP′은 직선 l과 수직이다.



▶ **$y=f(x)$의 그래프**



429 2011학년도 11월 교육청

개념 01,02

좌표평면 위에 중심의 좌표가 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$이고 반지름의 길이가 1인 원 C_1이 있다. 원 C_1을 y축에 대하여 대칭이동한 원을 C_2라 하고 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 원을 C_3이라 하자. 원 C_1의 내부와 원 C_2의 내부의 공통부분의 넓이와 원 C_2의 내부와 원 C_3의 내부의 공통부분의 넓이의 합은?

① $\frac{4}{3}\pi-2\sqrt{3}$ ② $\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$
④ $\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$

원 C_1의 방정식이 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=1$
이므로

$$C_2:\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=1$$
$$C_3:\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=1$$

이다. 구하는 넓이를 S라 하면 S는 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $60°$인 부채꼴의 넓이에서 밑변의 길이가 $\frac{1}{2}$이고 높이가 $\frac{\sqrt{3}}{2}$인 직각삼각형의 넓이를 뺀 것의 8배이다. 따라서 구하는 넓이의 합은

$$S=8\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$$

답 ③

430 2015학년도 09월 교육청

개념 02

자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 $P_n(x_n, y_n)$은 다음과 같은 규칙에 따라 이동한다. (단, $x_n y_n \neq 0$)

(가) 점 P_n이 $x_n y_n>0$이고 $x_n>y_n$이면 이 점을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이 점 P_{n+1}이다.
(나) 점 P_n이 $x_n y_n>0$이고 $x_n<y_n$이면 이 점을 x축에 대하여 대칭이동한 점이 점 P_{n+1}이다.
(다) 점 P_n이 $x_n y_n<0$이면 이 점을 y축에 대하여 대칭이동한 점이 점 P_{n+1}이다.

P_1의 좌표가 $(3, 2)$일 때, $10x_{50}+y_{50}$의 값을 구하시오.

주어진 규칙에 따라 점 P_2, P_3, P_4, …를 차례로 구하면

$$P_1(3, 2) \xrightarrow{(가)} P_2(2, 3) \xrightarrow{(나)} P_3(2, -3) \xrightarrow{(다)} P_4(-2, -3) \xrightarrow{(가)} P_5(-3, -2)$$
$$\xrightarrow{(나)} P_6(-3, 2) \xrightarrow{(다)} P_7(3, 2) \xrightarrow{(가)} P_8(2, 3) \xrightarrow{(나)} P_9(2, -3) \xrightarrow{(다)} \cdots$$

이다. 따라서 자연수 n에 대하여 점 P_n의 좌표와 점 P_{n+6}의 좌표가 같고 $50=6\times8+2$이므로 점 P_{50}의 좌표는 점 P_2의 좌표와 같다. 따라서 점 P_{50}의 좌표가 $(2, 3)$이므로 $x_{50}=2$, $y_{50}=3$이고 구하는 값은

$$10x_{50}+y_{50}=10\cdot2+3=23$$

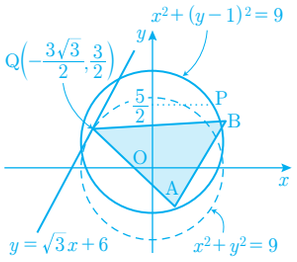
답 23

431 2014학년도 11월 교육청

개념 03

원 $x^2+(y-1)^2=9$ 위의 점 P가 있다. 점 P를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 후 y축에 대하여 대칭이동한 점을 Q라 하자. 두 점 $A(1, -\sqrt{3})$, $B(3, \sqrt{3})$에 대하여 삼각형 ABQ의 넓이가 최대일 때, 점 P의 y좌표를 구하시오.

오른쪽 그림과 같이 원 $x^2+(y-1)^2=9$ 위의 점 P를 주어진 조건에 의하여 이동한 점 Q는 원 $x^2+y^2=9$ 위를 움직인다. 점 Q를 접점으로 하는 원 $x^2+y^2=9$의 접선 중 직선 AB에 평행하고, 점 Q의 x좌표가 음수일 때, 삼각형 ABQ의 넓이가 최대이다. 기울기가 $\sqrt{3}$인 원 $x^2+y^2=9$의 접선의 방정식은 $y=\sqrt{3}x\pm6$이다. 직선 $y=\sqrt{3}x\pm6$과 원 $x^2+y^2=9$가 만나는 점이 Q이므로 $x^2+(\sqrt{3}x\pm6)^2=9$에서



$$4x^2\pm12\sqrt{3}x+27=0 \Rightarrow (2x\pm3\sqrt{3})^2=0$$

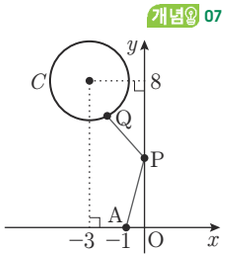
이고 $x<0$이므로 $x=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$이다. 따라서 삼각형 ABQ의 넓이가 최대인 점 Q의 좌표는 $\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$이다. 점 P는 점 Q를 y축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 점이므로 점 P의 좌표는 $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right)$이고 구하는 값은 점 P의 y좌표이므로 $\frac{5}{2}$이다.

답 $\frac{5}{2}$

432 2013학년도 03월 교육청

개념 07

오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 점 $A(-1, 0)$과 원 $C:(x+3)^2+(y-8)^2=5$가 있다. y축 위의 점 P와 원 C 위의 점 Q에 대하여 $\overline{AP}+\overline{PQ}$의 최솟값을 k라 할 때, k^2의 값을 구하시오.



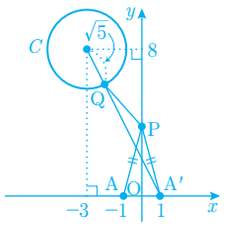
점 $A(-1, 0)$을 y축에 대하여 대칭이동한 점을 $A'(1, 0)$이라 할 때,

$$\overline{AP}+\overline{PQ}=\overline{A'P}+\overline{PQ}\geq\overline{A'Q}$$

이다. 또한 $\overline{A'Q}$의 최솟값은 점 $A'(1, 0)$과 점 $(-3, 8)$ 사이의 거리에서 원 C의 반지름의 길이 $\sqrt{5}$를 뺀 값이므로

$$k=4\sqrt{5}-\sqrt{5}=3\sqrt{5}$$

에서 구하는 값은 $k^2=45$이다.



답 45

개념치료

개념

01. 점과 도형의 평행이동

433 중요

직선 $y=2x+k$를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 직선이 포물선 $y=-x^2+4x+4$에 접할 때, 상수 k의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

직선 $y=2x+k$를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동하면

$$y-5=2(x+1)+k \quad \Rightarrow \quad y=2x+k+7$$

이다. 이 직선이 포물선 $y=-x^2+4x+4$에 접하므로

$$2x+k+7=-x^2+4x+4 \quad \Rightarrow \quad x^2-2x+k+3=0$$

이다. x에 대한 이차방정식 $x^2-2x+k+3=0$의 판별식을 D라 할 때,

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-k-3=0$$

에서 $k=-2$이다.

답 ①

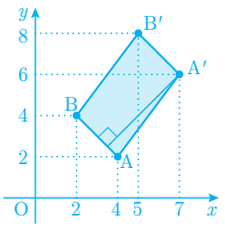
434

원 $(x+3)^2+y^2=6$을 원 $x^2+(y-4)^2=6$으로 옮기는 평행이동에 의하여 두 점 A(4, 2), B(2, 4)가 각각 두 점 A′, B′으로 평행이동한다. 사각형 ABB′A′의 넓이를 구하시오.

주어진 평행이동은 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 4만큼 이동하는 평행이동이다. 이 평행이동에 의하여 두 점 A(4, 2), B(2, 4)는 각각 두 점 A′(7, 6), B′(5, 8)로 평행이동한다. 이때

$$\overline{AB}=\overline{A'B'}=2\sqrt{2}$$

이고 두 직선 AB, A′B′가 서로 평행하므로 사각형 ABB′A′은 평행사변형이다. 밑변을 선분 AB라 할 때, 높이는 점 A′(7, 6)과 직선 $x+y-6=0$ 사이의 거리이므로 $\frac{|7+6-6|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{7\sqrt{2}}{2}$에서 구하는 사각형의 넓이는 $2\sqrt{2}\cdot\frac{7\sqrt{2}}{2}=14$이다.



답 14

개념

02. 점과 도형의 대칭이동

435 중요

점 P$(a, a+2)$를 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭이동한 점을 P_1, P_2, P_3이라 하자. 삼각형 $P_1P_2P_3$의 넓이가 30일 때, 양수 a의 값을 구하시오.

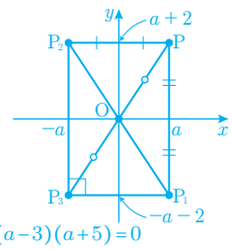
점 P를 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 점은 각각

$$P_1(a, -a-2),\ P_2(-a, a+2),\ P_3(-a, -a-2)$$

이다. 이때 선분 P_1P_3이 x축과 서로 평행하고 선분 P_2P_3과 y축이 서로 평행하므로 삼각형 $P_1P_2P_3$는 $\angle P_3=90°$인 직각삼각형이다. $\overline{P_1P_3}=2a$, $\overline{P_2P_3}=2a+4$이고 삼각형 $P_1P_2P_3$의 넓이가 30이므로

$$\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot(2a+4)=30 \quad \Rightarrow \quad a^2+2a-15=(a-3)(a+5)=0$$

이고 $a>0$이므로 구하는 a의 값은 3이다.



답 3

436

포물선 $y=-x^2-6x+a$를 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 포물선이 x축과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{AB}=4\sqrt{2}$일 때, 상수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

포물선 $y=-x^2-6x+a$를 x축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$$-y=-x^2-6x+a \quad \Rightarrow \quad y=x^2+6x-a$$

이고 이 포물선을 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$$y-3=x^2+6x-a \quad \Rightarrow \quad y=x^2+6x-a+3$$

이다. 포물선 $y=x^2+6x-a+3$이 x축과 만나는 두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 하면 α, β는 x에 대한 이차방정식 $x^2+6x-a+3=0$의 두 실근이다. 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-6$, $\alpha\beta=-a+3$이고 $|\alpha-\beta|=\overline{AB}=4\sqrt{2}$이므로

$$|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{36+4(a-3)}=4\sqrt{2}$$

에서 양변을 제곱하여 정리하면 $a=2$이다.

437

답 ⑤

직선 $ax+y+3a-2=0$을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 직선이 원 $x^2+(y-1)^2=3$에 접할 때, 모든 실수 a의 값의 합을 구하시오.

직선 $ax+y+3a-2=0$을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동하면

$$a\cdot(-y)+(-x)+3a-2=0 \quad \Rightarrow \quad x+ay-3a+2=0 \qquad \cdots ㉠$$

이다. 이 직선이 원 $x^2+(y-1)^2=3$에 접하므로 원의 중심 (0, 1)과 직선 ㉠ 사이의 거리가 반지름의 길이 $\sqrt{3}$과 같다. 따라서

$$\frac{|0+a-3a+2|}{\sqrt{1+a^2}}=\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad |2a-2|=\sqrt{3a^2+3}$$

에서 양변을 제곱하여 정리하면 $a^2-8a+1=0$이다. 이 이차방정식의 판별식 D가 $\frac{D}{4}=(-4)^2-1=15>0$이므로 서로 다른 두 실근을 가진다. 따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 a의 값의 합은 8이다.

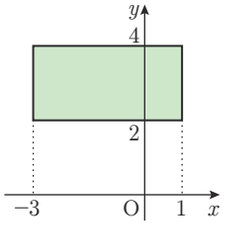
답 8

개념

03. 평행이동과 대칭이동의 도형에의 응용

438

오른쪽 그림과 같이 각 모서리가 x축 또는 y축에 평행한 직사각형을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $-a^2$만큼 평행이동하였을 때, 평행이동한 직사각형이 제2사분면 위에만 있도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하시오.



평행이동한 직사각형이 제2사분면에만 있으면 점 (1, 2)를 평행이동한 점이 제2사분면에 있다. 즉 점 (1, 2)를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $-a^2$만큼 평행이동한 점은 $(1+a, 2-a^2)$이고 이 점이 제2사분면에 있으므로

$$1+a<0 \quad \Rightarrow \quad a<-1$$

$$2-a^2>0 \quad \Rightarrow \quad -\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$$

이다. 따라서 구하는 a의 값의 범위는 $-\sqrt{2}<a<-1$이다.

답 $-\sqrt{2}<a<-1$

439 중요

직선 $l: y=mx+n$을 직선 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 6만큼 평행이동한 후 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 직선을 l'이라 하자. 두 직선 l, l'이 모두 원 $(x-2)^2+(y-4)^2=8$의 넓이를 이등분할 때, 두 실수 m, n의 합 $m+n$의 값을 구하시오. (단, $m\neq 0$)

직선 l을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 6만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y-6=m(x+2)+n \quad \Rightarrow \quad y=mx+2m+n+6$$

이고 이 직선을 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 직선 l'은

$$-x=-my+2m+n+6 \quad \Rightarrow \quad x-my+2m+n+6=0$$

이다. 이때 두 직선 l, l'이 모두 원 $(x-2)^2+(y-4)^2=8$을 이등분하므로 두 직선 l, l'은 원의 중심 $(2, 4)$를 지난다. 따라서

$$2m+n=4, \quad 2-4m+2m+n+6=0$$

의 두 식을 연립하여 풀면 $m=3$, $n=-2$이므로 구하는 값은 $m+n=1$이다.

답 1

440

원 $C: x^2+y^2=16$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원을 C'이라 할 때, 두 원 C, C'의 공통현의 길이는 2이다. 점 (a, b)가 그리는 도형의 길이를 구하시오.

원 C의 중심을 $\mathrm{O}(0, 0)$이라 하고 원 C'이

$$C': (x-a)^2+(y-b)^2=16$$

이므로 원 C'의 중심을 $\mathrm{O}'(a, b)$이라 하자. 두 원 C, C'의 두 교점을 각각 P, Q라 하면 사각형 $\mathrm{OPO'Q}$는 마름모이다. 이 마름모의 대각선의 교점을 R라 할 때, $\angle \mathrm{ORP}=90°$이고

$$\overline{\mathrm{OP}}=4, \quad \overline{\mathrm{OR}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OO'}}, \quad \overline{\mathrm{PR}}=1$$

이므로 피타고라스의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{OR}}^2+\overline{\mathrm{PR}}^2=\overline{\mathrm{OP}}^2$에서 $\frac{1}{4}\overline{\mathrm{OO'}}^2+1=16$

이고 이를 정리하면 $\overline{\mathrm{OO'}}^2=60$이다. 즉, $a^2+b^2=60$에서 점 $\mathrm{O}'(a, b)$는 반지름의 길이가 $2\sqrt{15}$인 원 위의 점이므로 점 (a, b)가 그리는 도형의 길이는 $4\sqrt{15}\pi$이다.

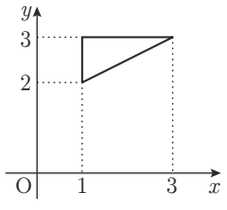
답 $4\sqrt{15}\pi$

441

원점에 대한 대칭이동을 f라 하고 직선 $y=x$에 대한 대칭이동을 g라 할 때,

$$f \to g \to f \to g \to f \to \cdots$$

와 같은 순서로 오른쪽 그림의 도형을 30번 이동한 도형을 좌표평면 위에 나타내시오.

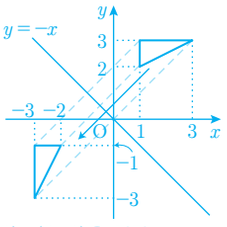


주어진 대칭이동의 순서대로 점 (x, y)를 대칭이동하면

$$(x, y) \xrightarrow{f} (-x, -y) \xrightarrow{g} (-y, -x)$$

$$\xrightarrow{f} (y, x) \xrightarrow{g} (x, y) \xrightarrow{f} \cdots$$

이므로 4번 대칭이동하면 처음의 점으로 되돌아온다. 따라서 주어진 순서대로 대칭이동을 했을 때, 30번 대칭이동한 것은 2번 대칭이동한 것과 같으므로 $(x, y) \to (-y, -x)$로의 이동, 즉 직선 $y=-x$에 대한 대칭이동과 같다. 이때 구하는 도형은 세 점 $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(3, 3)$을 각각 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 세 점 $(-2, -1)$, $(-3, -1)$, $(-3, -3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형이고 이를 좌표평면에 나타내면 그림과 같다.



답 풀이 참조

개념

04. 점 (a, b)에 대한 대칭이동

442

점 $\mathrm{A}(a, 2)$를 점 $(1, 1)$에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 할 때, $\overline{\mathrm{AA'}}=2\sqrt{5}$이다. 양수 a의 값을 구하시오.

점 $\mathrm{A}(a, 2)$를 점 $(1, 1)$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{A}'(x, y)$라 할 때, 점 $(1, 1)$은 선분 $\mathrm{AA'}$의 중점이다. 즉,

$$1=\frac{a+x}{2}, \quad 1=\frac{2+y}{2}$$

에서 $x=2-a$, $y=0$이므로 $\mathrm{A}'(2-a, 0)$이다. 이때, $\overline{\mathrm{AA'}}=2\sqrt{5}$이므로

$$\sqrt{(2-2a)^2+(0-2)^2}=2\sqrt{5}$$

이고 이를 양변을 제곱하여 정리하면

$$(2-2a)^2+4=20 \quad \Rightarrow \quad (a-1)^2=4$$

에서 $a>0$이므로 $a=3$이다.

답 3

443 중요

원 $C: (x-3)^2+(y+3)^2=r^2$을 점 $(2, 1)$에 대하여 대칭이동한 원을 C'이라 할 때, 두 원 C, C'은 서로 외접한다. 양수 r의 값은?

① $\sqrt{14}$ ② $\sqrt{15}$ ③ 4
④ $\sqrt{17}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

원 C의 중심 $(3, -3)$을 점 $(2, 1)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b)라 할 때, 점 $(2, 1)$은 두 점 $(3, -3)$과 (a, b)를 잇는 선분의 중점이므로

$$\frac{3+a}{2}=2, \quad \frac{-3+b}{2}=1$$

에서 $a=1$, $b=5$이다. 대칭이동한 원의 반지름의 길이는 같으므로 원 C'의 방정식은 $C': (x-1)^2+(y-5)^2=r^2$이다. 두 원 C, C'의 중심거리를 d라 하면

$$d=\sqrt{(1-3)^2+(5+3)^2}=2\sqrt{17}$$

이고 두 원 C, C'이 서로 외접하므로 $d=2\sqrt{17}=2r$에서 $r=\sqrt{17}$이다.

답 ④

개념

05. 직선 $x=a$, $y=b$에 대한 대칭이동

444 중요

세 점 $\mathrm{A}(2, 6)$, $\mathrm{B}(-2, 3)$, $\mathrm{C}(6, 3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심을 G라 하자. 점 G를 직선 BC에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하시오.

삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$$\mathrm{G}\left(\frac{2-2+6}{3}, \frac{6+3+3}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{G}(2, 4)$$

이다. 또한 두 점 B와 C의 y좌표가 모두 3이므로 직선 BC의 방정식은 $y=3$이다. 이때, 구하는 점의 좌표를 $(2, a)$라 하면 두 점 $(2, 4)$, $(2, a)$를 이은 선분의 중점이 직선 $y=3$ 위에 있다. 즉, $\frac{4+a}{2}=3$에서 $a=2$이므로 구하는 점의 좌표는 $(2, 2)$이다.

답 $(2, 2)$

445

직선 $l: y=-3x+9$를 직선 $x=1$에 대하여 대칭이동한 직선을 l'이라 할 때, 두 직선 l, l'과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

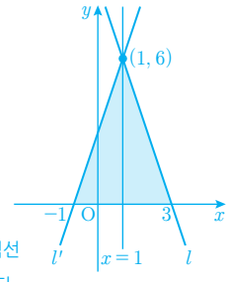
직선 l 위의 점 (x, y)를 직선 $x=1$에 대하여 대칭이동한 점을 (x', y')이라 하면

$$\frac{x+x'}{2}=1, \quad y=y'$$

에서 $x=2-x'$, $y=y'$이다. 점 (x, y)가 직선 l 위의 점이므로 x, y를 각각 $y=-3x+9$에 대입하면

$$y'=-3(2-x')+9 \quad \Rightarrow \quad y'=3x'+3$$

에서 $l': y=3x+3$이다. 두 직선 l, l'의 x절편이 각각 3, -1이고 두 직선 l_1, l_2의 교점이 $(1, 6)$이므로 두 직선 l, l'과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 6=12$이다.



답 12

개념

06. 직선 $y=ax+b$에 대한 대칭이동

446 중요

두 원 $x^2+y^2=9$, $(x+2)^2+(y-4)^2=9$가 직선 $ax+by-10=0$에 대하여 대칭일 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하시오.

두 원의 중심이 직선 $ax+by-10=0$에 대칭임을 이용하면

(i) 두 원의 중심 $(0, 0)$, $(-2, 4)$를 이은 선분의 중점 $(-1, 2)$가 직선 $ax+by-10=0$ 위의 점이므로

$$-a+2b-10=0 \quad \cdots ㉠$$

(ii) 두 원의 중심을 지나는 직선이 직선 $ax+by-10=0$과 수직이다.
두 원의 중심 $(0, 0)$, $(-2, 4)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y=-2x \quad \Rightarrow \quad 2x+y=0$$

이고 직선 $ax+by-10=0$과 수직이므로

$$2\cdot a+1\cdot b=0 \quad \Rightarrow \quad 2a+b=0 \quad \cdots ㉡$$

(i), (ii)에 의하여 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=4$이다.

답 $a=-2$, $b=4$

447

직선 $y=-2x+6$을 직선 $y=x+2$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식을 구하시오.

직선 $y=-2x+6$ 위의 한 점 $P(x, y)$를 직선 $y=x+2$에 대하여 대칭이동한 점을 $P'(x', y')$라 하자. 선분 PP'의 중점 $\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right)$이 직선 $y=x+2$ 위의 점이므로

$$\frac{y+y'}{2}=\frac{x+x'}{2}+2 \quad \Rightarrow \quad x-y=-x'+y'-4 \quad \cdots ㉠$$

이다. 또한, 직선 PP'가 직선 $y=x+2$에 수직이므로

$$\frac{y'-y}{x'-x}\cdot 1=-1 \quad \Rightarrow \quad x+y=x'+y' \quad \cdots ㉡$$

이다. ㉠+㉡을 하여 정리하면 $x=y'-2$이고 ㉠−㉡을 하여 정리하면 $y=x'+2$이다. 이때 점 $P(x, y)$가 직선 $y=-2x+6$ 위의 점이므로

$$x'+2=-2(y'-2)+6 \quad \Rightarrow \quad y'=-\frac{1}{2}x'+4$$

이다. 따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=-\frac{1}{2}x+4$이다.

답 $y=-\frac{1}{2}x+4$

개념

07. 대칭이동을 이용한 두 점 사이의 거리의 최솟값

448

두 점 A(5, 3), B(0, 5)와 직선 $y=2$ 위의 한 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값은?

① $2\sqrt{5}$ ② 5 ③ $4\sqrt{2}$
④ $\sqrt{41}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

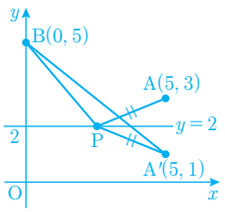
점 A를 직선 $y=2$에 대하여 대칭이동한 점을 $A'(5, a)$라 하면 선분 AA'의 중점이 직선 $y=2$ 위에 있으므로 $\frac{a+3}{2}=2$에서 $a=1$이고 $A'(5, 1)$이다.
이때 $\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로

$$\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{A'P}+\overline{PB}\geq\overline{A'B}$$

이고 세 점 A', B, P가 한 직선 위에 있을 때, $\overline{AP}+\overline{PB}$의 값이 최소가 된다. 이때

$$\overline{A'B}=\sqrt{(0-5)^2+(5-1)^2}=\sqrt{41}$$

에서 구하는 최솟값은 $\sqrt{41}$이다.



답 ④

449 중요

두 점 A(4, 2), B(1, 3)과 x축 위의 한 점 P, y축 위의 한 점 Q에 대하여 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$의 값이 최소가 될 때, 점 P의 x좌표를 a, 점 Q의 y좌표를 b라 할 때, ab의 값을 구하시오.

점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하고, 점 B를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면

$$A'(4, -2), \quad B'(-1, 3)$$

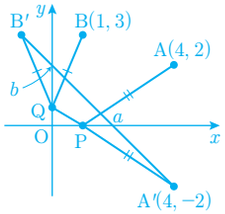
이다. 이때, $\overline{AP}=\overline{A'P}$이고 $\overline{QB}=\overline{QB'}$이므로

$$\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'}\geq\overline{A'B'}$$

이고 네 점 A, B, P, Q가 한 직선 위에 있을 때 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$의 값이 최소가 된다. 직선 A'B'의 방정식은

$$y+2=\frac{3+2}{-1-4}(x-4) \quad \Rightarrow \quad y=-x+2$$

에서 a는 직선 A'B'의 x절편이므로 $0=-a+2$에서 $a=2$이고 b는 직선 A'B'의 y절편이므로 $b=2$이다. 따라서 구하는 값은 $ab=4$이다.



답 4

450

실수 a에 대하여 $\sqrt{2a^2+2a+5}+\sqrt{2a^2-8a+10}$의 최솟값을 m이라 하고 그때의 a의 값을 α라 할 때, $m+\alpha$의 값을 구하시오.

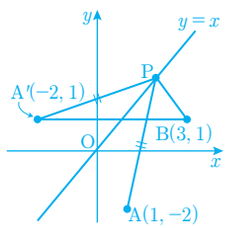
주어진 식을 변형하면

$$\sqrt{2a^2+2a+5}+\sqrt{2a^2-8a+10}$$
$$=\sqrt{(a-1)^2+(a+2)^2}+\sqrt{(a-3)^2+(a-1)^2}$$

이므로 세 점 A(1, −2), B(3, 1), P(a, a)라 할 때, 주어진 식은 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 값과 같다. 이때 점 P는 직선 $y=x$ 위에 있으므로 점 A(1, −2)를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 A'(−2, 1)에 대하여 $\overline{AP}=\overline{A'P}$이다. 이때

$$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}\geq\overline{A'B}$$

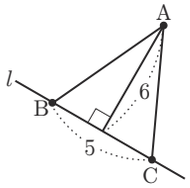
이고 $\overline{A'B}=5$이므로 구하는 최솟값은 5이다. 또한 이때의 점 P는 직선 A'B, 즉 직선 $y=1$과 직선 $y=x$의 교점 위에 있으므로 P(1, 1)이고 $a=1$이다. 따라서 $\alpha=1$이므로 구하는 값은 $m+\alpha=6$이다.



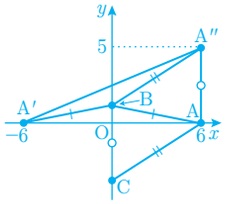
답 6

451

오른쪽 그림과 같이 점 A와 거리가 6인 직선 l이 있고 직선 l 위의 두 점 B, C가 $\overline{BC}=5$를 만족시킨다. 삼각형 ABC의 둘레의 길이의 최솟값을 구하시오.



오른쪽 그림과 같이 직선 l을 y축으로 놓고 점 A를 A(6, 0)으로 놓자. 이때 선분 BC는 y축 위에 있다. 점 A를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 $A'(-6, 0)$으로 놓으면 $\overline{AB}=\overline{A'B}$이고 점 A를 y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 점을 A''이라 하면 $\overline{BC}=\overline{AA''}$이고 $\overline{AC}=\overline{A''B}$이다. 따라서



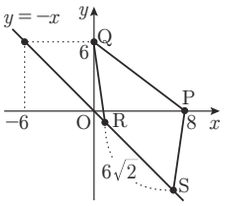
$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=\overline{A'B}+\overline{AA''}+\overline{A''B}$$
$$=\overline{A'B}+\overline{BA''}+\overline{AA''}\geq\overline{A'A''}+\overline{AA''}$$

에서 $\overline{A'A''}=\sqrt{12^2+5^2}=13$이고 $\overline{AA''}=5$이므로 삼각형 ABC의 둘레의 길이의 최솟값은 $\overline{A'A''}+\overline{AA''}=18$이다.

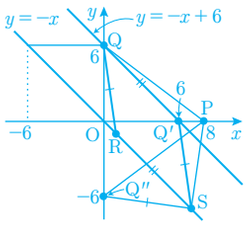
답 18

452 상위1%

오른쪽 그림과 같이 좌표평면에 두 점 P(8, 0), Q(0, 6)이 있다. 길이가 $6\sqrt{2}$인 선분 RS가 반직선 $y=-x$ $(x\geq-6)$ 위에 있을 때, 사각형 PQRS의 둘레의 길이의 최솟값을 구하시오.



점 Q를 지나고 직선 $y=-x$에 평행한 직선 $y=-x+6$ 위의 점 $Q'(6, 0)$를 잡으면 사각형 QRSQ′은 평행사변형이고 $\overline{RS}=\overline{QQ'}$이고 $\overline{QR}=\overline{Q'S}$이다. 즉, 사각형 PQRS의 둘레의 길이는 사각형 PQQ′S의 둘레의 길이와 같다. 이때 $\overline{PQ}$, $\overline{QQ'}$의 값은 고정이므로 $\overline{Q'S}+\overline{SP}$의 값이 최소가 되면 PQRS의 둘레의 길이도 최소가 된다. 점 Q′을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점을 $Q''(0, -6)$이라 하면 $\overline{Q'S}=\overline{Q''S}$이므로



$$\overline{Q'S}+\overline{SP}=\overline{Q''S}+\overline{SP}\geq\overline{PQ''}=\sqrt{6^2+8^2}=10$$

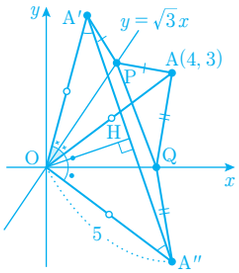
이다. 따라서 사각형 PQRS의 둘레의 길이의 최솟값은 $10+6\sqrt{2}+10=20+6\sqrt{2}$

답 $20+6\sqrt{2}$

453 상위1%

점 A(4, 3)과 직선 $y=\sqrt{3}x$ 위의 한 점 P, x축 위의 한 점 Q에 대하여 삼각형 APQ의 둘레의 길이의 최솟값을 구하시오.

점 A를 직선 $y=\sqrt{3}x$에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하고 점 A를 직선 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A''이라 하자. $\overline{AP}=\overline{A'P}$이고 $\overline{AQ}=\overline{A''Q}$이므로 삼각형 APQ의 둘레의 길이는



$$\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QA}=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QA''}\geq\overline{A'A''}$$

이다. 이때 $\angle AOP=\alpha$, $\angle AOQ=\beta$라 하면 $\angle A'OP=\alpha$, $\angle A'OQ=\beta$이다.
또한 $\angle POQ=\angle\alpha+\beta=60°$이므로

$$\angle A'OA''=2\alpha+2\beta=2(\alpha+\beta)=120°$$

이다. 점 O에서 선분 $A'A''$에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 $OA'A''$는 이등변삼각형이므로 점 H는 선분 $A'A''$의 중점이고 $\angle AOH=\angle A''OH=60°$이다. 따라서

$$\overline{A'H}=\overline{OA'}\sin 60°=5\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$$

이고 $\overline{A'A''}=2\overline{A'H}=5\sqrt{3}$이므로 삼각형 APQ의 둘레의 길이의 최솟값은 $5\sqrt{3}$

답 $5\sqrt{3}$

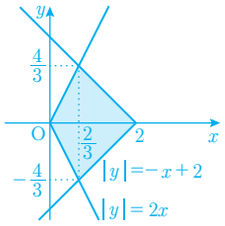
개념

08. 절댓값 기호를 포함한 식의 그래프

454

방정식 $|y|=2x$가 나타내는 도형과 방정식 $|y|=-x+2$가 나타내는 도형으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

방정식 $|y|=2x$가 나타내는 도형과 방정식 $|y|=-x+2$가 나타내는 도형을 그리면 오른쪽 그림과 같다. 두 직선 $y=2x$, $y=-x+2$의 교점이 $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$이므로 두 도형으로 둘러싸인 부분은 네 점



$$(0, 0), \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right), (2, 0), \left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$$

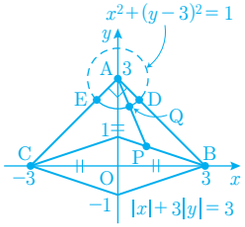
를 꼭짓점으로 하는 사각형이고 그 넓이는 세 점 $(0, 0), \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right), (2, 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이의 2배이다. 따라서 구하는 넓이는 $2\times\left(\frac{1}{2}\times2\times\frac{4}{3}\right)=\frac{8}{3}$이다.

답 $\frac{8}{3}$

455 중요

점 A(0, 3)과 방정식 $|x|+3|y|=3$이 나타내는 도형 위를 움직이는 점 P에 대하여 선분 AP가 원 $x^2+(y-3)^2=1$과 만나는 점을 Q라 하자. 점 Q가 그리는 도형의 길이를 구하시오.

직선 $x+3y=3$의 $x\geq0$, $y\geq0$인 부분은 점 (3, 0)과 점 (0, 1)을 이은 선분이다. 따라서 방정식 $|x|+3|y|=3$을 좌표평면에 나타내면



$$(3, 0), (0, 1), (-3, 0), (0, -1)$$

을 네 꼭짓점으로 하는 마름모이고 오른쪽 그림과 같다. 이때 두 점 B, C를 B(3, 0), C(−3, 0)이라 하고 두 선분 AB, AC가 원 $x^2+(y-3)^2=1$과 만나는 점을 각각 D, E라 하자. 점 Q가 나타내는 도형은 호 DE이고 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=3$이므로 $\angle OAB=\angle OAC=45°$에서 $\angle DAE=90°$이다. 따라서 구하는 도형의 길이는 $2\pi\cdot\frac{1}{4}=\frac{\pi}{2}$이다.

답 $\frac{\pi}{2}$

456 상위1%

함수 $f(x)=x^2+8x+15$의 그래프를 x축에 대하여 a만큼, y축에 대하여 b만큼 평행이동하면 함수 $y=g(x)$의 그래프와 일치한다. 세 함수 $y=g(x)$, $y=|g(x)|$, $y=g(|x|)$의 그래프가 모두 일치할 때, $a+b$의 최솟값은?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

주어진 이차함수 $f(x)$를 표준형으로 변형하면 $f(x)=(x+4)^2-1$이다. 이 이차함수의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면 함수 $y=g(x)$의 그래프와 일치하므로

$$g(x)=(x+4-a)^2-1+b$$

이다. 함수 $y=g(x)$의 그래프가 함수 $y=|g(x)|$의 그래프와 일치할 때, 함수 $y=g(x)$의 그래프가 $y<0$인 부분이 없으므로 $-1+b\geq0$에서 $b\geq1$이고 함수 $y=g(x)$의 그래프와 함수 $y=g(|x|)$의 그래프가 일치할 때, 함수 $y=g(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로 꼭짓점의 x좌표가 0이다. 즉, $-4+a=0$에서 $a=4$이다. 따라서 $a+b$는 $a=4$, $b=1$일 때, 최솟값 5를 가진다.

답 ②

457

세 실수 a, b, c에 대하여 $a+b+c=8$일 때,

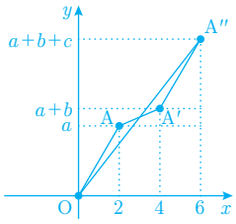
$$\sqrt{4+a^2}+\sqrt{4+b^2}+\sqrt{4+c^2}$$

의 최솟값을 구하시오.

좌표평면의 원점을 O라 하고 세 점 A, B, C를

$$A(2,\ a),\quad B(2,\ b),\quad C(2,\ c)$$

라 할 때, $\sqrt{4+a^2}+\sqrt{4+b^2}+\sqrt{4+c^2}$의 값은 $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}$의 값과 같다. 점 A를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점을 $A'(4,\ a+b)$라 할 때, $\overline{OB}=\overline{AA'}$이고 점 A'을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 점을 $A''(6,\ a+b+c)$라 할 때, $\overline{OC}=\overline{A'A''}$이다. 따라서



$$\sqrt{4+a^2}+\sqrt{4+b^2}+\sqrt{4+c^2}=\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}$$
$$=\overline{OA}+\overline{AA'}+\overline{A'A''}\ge\overline{OA''}$$

이고 $\overline{OA''}=\sqrt{36+(a+b+c)^2}=\sqrt{36+64}=10$이므로 구하는 식의 최솟값은 10

답 10

458

직선 $y=-3x$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 직선이 원 $x^2+y^2=10$과 만나도록 하는 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는?

① 10 ② 11 ③ 12

④ 13 ⑤ 14

직선 $y=-3x$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면

$$y-b=-3(x-a)\ \Rightarrow\ 3x+y-3a-b=0\qquad\cdots\ ㉠$$

이다. 직선 ㉠이 원 $x^2+y^2=10$과 만나려면 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 ㉠ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{10}$보다 같거나 작아야 한다. 즉,

$$\frac{|-3a-b|}{\sqrt{3^2+1^2}}\le\sqrt{10}\ \Rightarrow\ |3a+b|\le10$$

이다. a, b가 자연수이므로 $|3a+b|\le10$을 만족시키는 a, b는 $a=1$일 때, b는 1부터 7까지의 자연수이고 $a=2$일 때, b는 1부터 4까지 자연수이고 $a=3$일 때, $b=1$이고 $a>3$일 때, b는 없다. 따라서 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 $7+4+1=12$

답 ③

459 마타

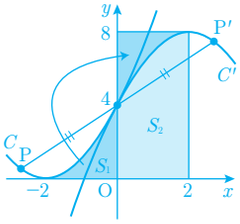
포물선 $C:y=(x+2)^2$을 점 $(0,\ 4)$에 대하여 대칭이동한 포물선을 C'이라 하자. 포물선 C와 x축, y축으로 둘러싸인 도형을 S_1, 포물선 C'과 x축, y축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 도형을 S_2라 할 때, 두 도형 S_1과 S_2의 넓이의 합을 구하시오.

포물선 C 위의 한 점 $P(x,\ y)$를 점 $(0,\ 4)$에 대하여 대칭이동한 점을 $P'(x',\ y')$이라 하자. 점 $(0,\ 4)$가 선분 PP'의 중점 $\left(\frac{x+x'}{2},\ \frac{y+y'}{2}\right)$이므로

$\frac{x+x'}{2}=0$, $\frac{y+y'}{2}=4$에서 $x=-x'$, $y=8-y'$이다.

점 $(x,\ y)$가 포물선 $y=(x+2)^2$ 위의 점이므로 x, y를 각각 대입하여 정리하면 $y'=-(x'-2)^2+8$이다.

즉, 포물선 C'의 방정식은 $y=-(x-2)^2+8$이다. 이때 오른쪽 그림과 같이 도형 S_1은 포물선 C'과 y축, 직선 $y=8$로 둘러싸인 도형과 합동이므로 두 도형 S_1, S_2의 넓이의 합은 네 점 $(0,\ 0)$, $(2,\ 0)$, $(2,\ 8)$, $(0,\ 8)$을 꼭짓점으로 하는 직사각형의 넓이와 같다. 즉, 구하는 넓이는 $2\cdot8=16$이다.

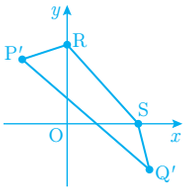


답 16

460 마타

좌표평면 위의 두 점 $P(x,\ 2)$, $Q(2,\ y)$와 y축 위의 한 점 R와 x축 위의 한 점 S에 대하여 $\overline{PR}+\overline{RS}+\overline{SQ}$의 최솟값이 4일 때, 점 $(x,\ y)$가 그리는 도형의 길이를 구하시오.

$x>0$일 때, 점 P를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 P'이라 하고 $x\le0$일 때, 점 P를 P'이라 하면 $P'(-|x|,\ 2)$이다. 마찬가지로 $y>0$일 때, 점 Q를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 Q'이라 하고 $y\le0$일 때, 점 Q를 Q'이라 하면 $Q'(2,\ -|y|)$이다. 이때 $\overline{PR}=\overline{P'R}$이고 $\overline{SQ}=\overline{SQ'}$이므로



$$\overline{PR}+\overline{RS}+\overline{SQ}=\overline{P'R}+\overline{RS}+\overline{SQ'}\ge\overline{P'Q'}$$

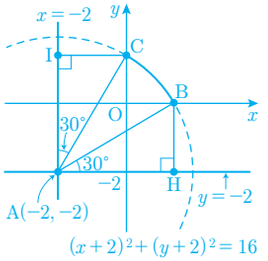
에서 $\overline{PR}+\overline{RS}+\overline{SQ}$의 최솟값은 $\overline{P'Q'}$이다. 즉, $\overline{P'Q'}=4$이므로

$$\sqrt{(2+|x|)^2+(-|y|-2)^2}=4\ \Rightarrow\ (|x|+2)^2+(|y|+2)^2=16$$

이다. $x\ge0$, $y\ge0$일 때, 원

$$(x+2)^2+(y+2)^2=16$$

의 중심을 $A(-2,\ -2)$, x축, y축과의 교점을 각각 B, C라 하자. 점 B에서 직선 $y=-2$에 내린 수선의 발을 H, 점 C에서 직선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 I라 하자. $\angle AHB=\angle AIC=90°$이고 $\overline{AB}=\overline{AC}=4$이고 $\overline{BH}=\overline{CI}=2$이므로 삼각비에 의하여 $\angle BAH=\angle CAI=30°$이고 $\angle BAC=30°$이다. 따라서 호 BC의 길이는 $2\pi\cdot4\cdot\frac{30°}{360°}=\frac{2}{3}\pi$이다.



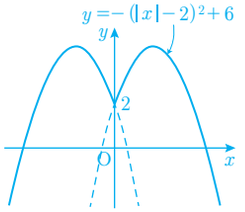
도형 $(|x|+2)^2+(|y|+2)^2=16$은 호 BC를 각각 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동하여 그린 도형이므로 점 $(x,\ y)$가 그리는 도형의 길이는 $4\times\frac{2}{3}\pi=\frac{8}{3}\pi$이다.

답 $\frac{8}{3}\pi$

461 마타

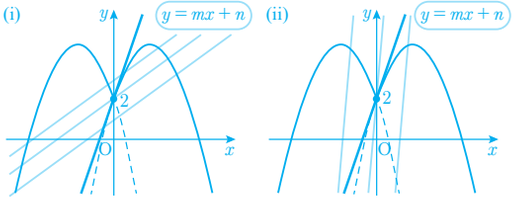
모든 실수 n에 대하여 곡선 $y=-(|x|-2)^2+6$과 직선 $y=mx+n$의 교점의 개수가 2 이하일 때, 양수 m의 최솟값을 구하시오.

곡선 $y=-(|x|-2)^2+6$은 포물선 $y=-(x-2)^2+6$에서 $x\ge0$인 부분만 그린 후 $x<0$인 부분은 $x\ge0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동하여 그린다. 따라서 주어진 곡선은 오른쪽 그림과 같고 점 $(0,\ 2)$를 지난다.



(i) 양수 m의 값이 포물선 $y=-(x-2)^2+6$ 위의 점 $(0,\ 2)$에서의 접선의 기울기보다 작은 경우, 아래 그림과 같이 곡선 $y=(|x|-2)^2+6$과 직선 $y=mx+n$의 교점의 개수가 3 이상이 되도록 하는 n이 존재한다. 따라서 문제의 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) 양수 m의 값이 포물선 $y=-(x-2)^2+6$ 위의 점 $(0,\ 2)$에서의 접선의 기울기보다 같거나 큰 경우, 아래 그림과 같이 곡선 $y=(|x|-2)^2+6$과 직선 $y=mx+n$의 교점의 개수는 2 이하이다.



(i), (ii)에 의하여 m의 값은 포물선 $y=-(x-2)^2+6$ 위의 점 $(0,\ 2)$에서의 접선의 기울기보다 크거나 같다. 점 $(0,\ 2)$에서 포물선 $y=-(x-2)^2+6$에 접하는 직선을 $y=kx+2$라 할 때, $kx+2=-(x-2)^2+6$을 정리하면 x에 대한 이차방정식 $x^2+(k-4)x=0$이다. 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, $D=(k-4)^2=0$이므로 $k=4$이다. 따라서 $m\ge4$이고 양수 m의 최솟값은 4이다.

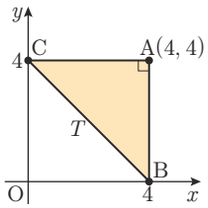
답 4

서 술 형

• 풀이 과정에 점수가 부여되니 풀이 과정 및 정답을 상세하게 서술하세요.

462

오른쪽 그림과 같이 세 점 A(4, 4), B(4, 0), C(0, 4)를 꼭짓점으로 하는 삼각형을 T라 하자. 삼각형 T를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 삼각형을 T'이라 할 때, 두 삼각형 T, T'으로 둘러싸인 부분의 넓이가 2이 되도록 하는 두 실수 a, b의 값을 각각 구하시오. (단, $ab=\frac{1}{2}$이고 $a>b>0$이다.)



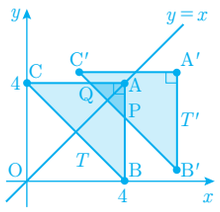
세 점 A, B, C를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점을 각각 A′, B′, C′라 하면

$A'(4+a, 3+b)$, $B'(4+a, b)$, $C'(a, 4+b)$

이고 삼각형 T'는 삼각형 A′B′C′이다. … [30%]

오른쪽 그림과 같이 직선 B′C′와 선분 AB와 만나는 점을 P, 선분 AC와 만나는 점을 Q라 하자. 직선 B′C′의 방정식은 $y+a+b=\frac{4-a-b}{a+b-4}(x-4)$에서 $y=-x+a+b$이므로 두 점 P, Q는

$P(4, a+b)$, $Q(a+b, 4)$이다. [20%]



따라서 두 삼각형 T, T'로 둘러싸인 부분은 삼각형 APQ이고 그 넓이가 2이므로

$$\frac{1}{2}(4-a-b)^2=2 \Rightarrow |4-a-b|=2$$

이고 $0<a+b<4$이므로 $4-a-b=2$에서 $a+b=2$이다. [30%]

이때 $ab=\frac{1}{2}$이므로 a, b는 t에 대한 이차방정식 $t^2-2t+\frac{1}{2}=0$의 두 실근이고

$t=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$에서 $a>b$이므로 $a=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$, $b=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$이다. [20%]

463

답 $a=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$, $b=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

직선 $l: y=mx+n$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선을 l'이라 하고, 포물선 $C: y=x^2$을 x축에 대하여 대칭이동한 포물선을 C'이라 하자. 직선 l이 포물선 C에 접하고 직선 l'이 포물선 C'에 접할 때, 두 상수 m, n의 값을 각각 구하시오. (단, $m\neq 0$)

직선 l을 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형은 $x=my+n$이고 포물선 $y=x^2$을 x축에 대하여 대칭이동한 도형은 $-y=x^2$에서 $y=-x^2$이다. [40%]

직선 l이 포물선 C에 접하므로

$$mx+n=x^2 \Rightarrow x^2-mx-n=0 \quad \cdots ㉠$$

이고 x에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 할 때,

$$D=m^2+4n=0 \Rightarrow m^2=-4n \quad \cdots ㉡$$

이다. [20%]

직선 l'이 포물선 C'에 접하므로

$$x=m\cdot(-x^2)+n \Rightarrow mx^2+x-n=0 \quad \cdots ㉢$$

이고 x에 대한 이차방정식 ㉢의 판별식을 D'이라 할 때,

$$D'=1+4mn=0 \Rightarrow 4n=-\frac{1}{m} \quad \cdots ㉣$$

이다. [20%]

㉣을 ㉡에 대입하여 정리하면 $m^2=\frac{1}{m}$에서

$$m^3-1=(m-1)(m^2+m+1)=0$$

이고 모든 실수 m에 대하여 $m^2+m+1=\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$이므로 $m=1$이다.

이를 ㉢에 다시 대입하면 $n=-\frac{1}{4}$이다. [20%]

답 $m=1$, $n=-\frac{1}{4}$

464 단계형

도형 $|x|+3|y|=18$위의 점 P에 대하여, 점 P를 중심으로 하고 반지름이 3인 원을 C_P라 하자. 원 C_P의 내부에 있는 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수이고 x좌표와 y좌표의 곱이 자연수인 모든 점의 개수를 A_P라 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) 도형 $|x|+3|y|=18$를 좌표평면 위에 나타내시오.

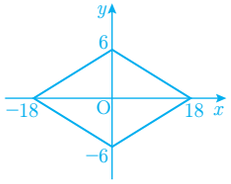
(2) x좌표와 y좌표가 모두 자연수이고 $A_P\geq 20$이 되도록 하는 점 P의 개수를 구하시오.

(3) x좌표와 y좌표가 모두 정수이고 $A_P\geq 20$이 되도록 하는 점 P의 개수를 구하시오.

(1) 도형 $|x|+3|y|=18$에서 $x\geq 0$, $y\geq 0$일 때, 직선 $x+3y=18$인 부분은 점 $(18, 0)$과 점 $(0, 6)$을 이은 선분이므로 도형 $|x|+3|y|=18$을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같이 네 점

$(18, 0)$, $(0, 6)$, $(-18, 0)$, $(0, -6)$

을 네 꼭짓점으로 하는 마름모이다.

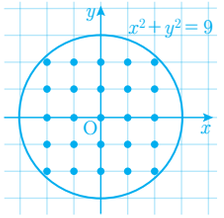


(2) 도형 $|x|+3|y|=18$에서 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점 P는

$P_1(3, 5)$, $P_2(6, 4)$, $P_3(9, 3)$

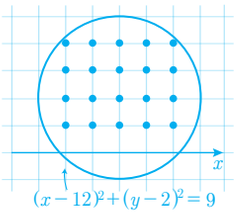
$P_4(12, 2)$, $P_5(15, 1)$

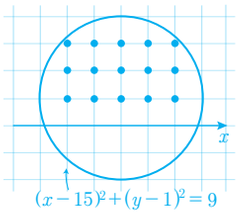
이다. 원 $x^2+y^2=9$ 내부의 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점은 오른쪽 그림과 같이 모두 25개이다. 점 $P(a, b)$라 할 때, 원 C_P는 원 $x^2+y^2=9$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원이므로 원 C_P 내부에 있는 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는 25이다. 이를 이용하면



(i) 점 P가 P_1 또는 P_2 또는 P_3일 때, 원 C_P의 내부의 점이 모두 제1사분면에 있으므로 x좌표와 y좌표의 곱이 모두 자연수이다. 따라서 $A_P=25$이다.

(ii) 점 P가 P_4 또는 P_5일 때, 원 C_P의 내부의 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수이고 x좌표와 y좌표의 곱이 자연수인 점은 다음과 같다.





따라서 $A_{P_4}=20$, $A_{P_5}=15$이다.

(i), (ii)에 의하여 $A_{(a, b)}\geq 20$이 되도록 하는 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는 4이다.

(3) 점 P가 제2사분면 또는 제4사분면 위에 있거나 x축 또는 y축 위에 있을 때, $A_P<20$이다. x좌표와 y좌표가 정수이고 제3사분면 위에 있을 때 $A_P\geq 20$이 되도록 하는 점 P는 x좌표와 y좌표가 자연수이고 $A_P\geq 20$이 되는 점 P, 즉 네 점 P_1, P_2, P_3, P_4를 원점에 대하여 대칭이동한 점이다. 따라서 x좌표와 y좌표가 정수이고 $P\geq 20$이 되도록 하는 점 P의 개수는 $4+4=8$이다.

답 (1) 풀이 참조 (2) 4 (3) 8

마무리를 위한 자가진단 모의고사,

책 거 리 실력

*책거리[책-꺼리] : 옛 서당, 글방에서 책 한 권을 다 읽어 떼었을 때 스승에게 감사하고 친구들과 함께 자축 하던 일

〈 수학(상) 〉

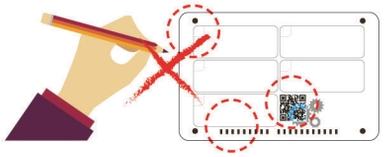
성명		수험번호	0	1	0	-					-				

○ 답안지의 해당 번호란에 반듯한 필체로 답을 작성해주세요. 답안 인식 범위는 빨간 선 내부입니다. 선을 벗어나거나 글자가 작은 경우 인식률이 떨어집니다.

예) 1 $3a-b$

잘못된 예) 1 $3a-b$ (X) 1 $3a-b$ (X) 1 $3a-b$ (X)

○ 답안지의 모서리에 위치한 네 점과 하단의 검정박스, QR코드는 답안을 인식하는 좌표이므로 훼손하지 마세요.



○ 문항에 따라 배점이 다르니 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고해주세요.

○ 채점과 정답 및 해설 확인, 진단평가에 따른 치료문제는 마타수학 앱을 통해 확인하실 수 있습니다.

1

① 구글 플레이, 애플 앱 스토어에서 "마타수학"을 검색하거나 QR코드를 스캔하여 앱을 설치하세요.

2



② 어플을 실행시켜 메뉴바의 QR 카메라 버튼을 누르세요.

3



③ 답안의 검정색 원을 촬영범위에 맞추고 촬영버튼을 누르세요.

4



④ 필기한 답안들이 OCR기술로 자동 인식되어 나타납니다.

마무리를 위한 자가진단 모의고사, 실력

책 거 리

〈 수학(상) 〉

제한시간 60분

/65점

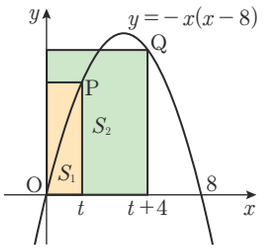
1. 실수 a, b, c에 대하여 $a-b=2$, $b+c=1$일 때, $a^2+b^2+c^2-ab+bc+ca$의 값을 구하시오. [3점]

2. x에 대한 두 이차방정식

$$x^2+ax+b=0, \quad x^2+bx+a=0$$

이 오직 한 개의 공통근을 가지고, 공통근이 아닌 다른 두 근의 비가 1:2일 때, $2a^2+b^2$의 값을 구하시오. [3점]

3. 그림과 같이 이차함수 $y=-x^2+8x$ 위의 점 P의 x좌표가 t이고 점 Q의 x좌표가 $t+4$이다. 선분 OP를 대각선으로 하고 x축과 y축 위에 각각 한 변이 있는 직사각형의 넓이를 S_1이라 하고, 선분 OQ를 대각선으로 하고 x축과 y축 위에 각각 한 변이 있는 직사각형의 넓이를 S_2라 하자. $S_2=5S_1$일 때, 실수 t의 값을 구하시오. (단, $0<t<4$) [3점]



4. $x+\frac{1}{x}=2\sqrt{2}$, $y-\frac{1}{y}=2$일 때, $\frac{y}{x}-\frac{x}{y}$의 값을 구하시오. (단, $x^2\neq y^2$이다.) [4점]

5. x에 대한 방정식

$$(k-5)x^2+(k-3)x-2=0$$

의 실근이 한 개일 때, 모든 실수 k의 값의 합을 구하시오. (단, 중근은 1개의 실근으로 생각한다.) [4점]

마타수학 **책 거 리 (실력)** 답안지 (1/3)

1	3
2	4
	5

※답안지 작성은 답란을 벗어나서는 안되며 반듯한 필체로 작성하시오.

VITRUV

6. 이차함수 $y=x^2-x+6$에 대하여 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 정수 k의 값의 개수를 구하시오. [4점]

7. x에 대한 사차방정식 $(x^2-kx)^2+(k+1)(x^2-kx)+k=0$이 실근을 가지지 않도록 하는 실수 k의 범위가 $\alpha<k<\beta$일 때, $\alpha+\beta$의 값을 구하시오. [4점]

8. 점 A(1, 2)와 두 점 B, C를 꼭짓점으로 하는 정삼각형 ABC의 무게중심이 원점일 때, 점 B의 y좌표의 최댓값을 구하시오. [4점]

9. $z^2+iz-1=0$을 만족하는 복소수 z에 대하여
$$f(n)=z^{2n}+\frac{1}{z^{2n}}$$
이다. 이때,
$$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)$$
의 값을 구하시오. (단, n은 자연수이다.) [4점]

10. x에 대한 방정식 $(x+2)(x-3)=m(x-1)$의 한 근 α가 -3보다 크고 -1보다 작을 때, 나머지 한 근 β의 범위는 $p<\beta<q$이다. pq의 값을 구하시오. (단, m, p, q는 실수이다.) [5점]

마타수학 **책 거 리 (실력)** 답안지 (2/3)

6 | 9

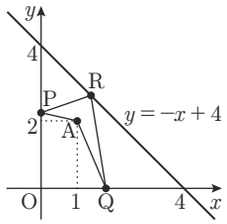
7 | 10

8

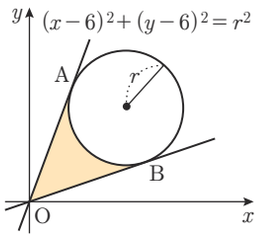
※답안지 작성은 답란을 벗어나서는 안되며 반듯한 필체로 작성하시오.

VITRUV

11. 그림과 같이 좌표평면 위의 점 A(1, 2)와 y축 위의 한 점 P, x축 위의 한 점 Q, 직선 $y=-x+4$ 위의 한 점 R에 대하여 사각형 APRQ의 둘레의 길이의 최솟값을 구하시오. [5점]



12. 오른쪽 그림과 같이 원점 O에서 원 $(x-6)^2+(y-6)^2=r^2$에 그은 두 접선이 원과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 두 직선의 기울기의 합이 4일 때, 두 직선과 호 AB로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. (단, $0<r<6$이다.) [5점]



13. 이차함수 $f(x)=(x-k)^2+k^2$에 대하여 곡선 $y=f(x)$를 직선 $y=2k^2$에 대하여 대칭이동한 곡선을 $y=g(x)$라 하자. 일차함수 $h(x)=2x+22$일 때, 다음 조건을 만족시키는 상수 k의 범위는 $a<k\le b$이다. 이때, ab의 값을 구하시오. (단, $k>0$이다.) [5점]

(가) 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=h(x)$의 서로 다른 두 교점 A, B가 존재한다.
(나) 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=h(x)$의 서로 다른 두 교점 C, D가 존재한다.
(다) 선분 CD는 선분 AB 위에 있다.

14. x에 대한 방정식 $ax^3-3bx^2+9bx-27a=0$이 서로 다른 세 정수를 근으로 가진다. 두 정수 a, b가 $|a|<30$, $|b|<30$일 때, 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오. [6점]

15. 다항식 $P(x)$를 $(x-1)^2$으로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R_1(x)$라 하고 $P(x)$를 $(x-1)^3$으로 나눈 나머지를 $R_2(x)$라 하자. $P(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\{R_1(x)\}^2=Q(x)$ (나) $P(1)=1$
(다) $R_1(3)+R_2(3)=14$

$Q(4)$의 값을 구하시오. [6점]

마타수학 **책 거 리 (실력)** 답안지 (3/3)

11

13

12

14

15

※답안지 작성은 답란을 벗어나서는 안되며 반듯한 필체로 작성하시오.

VITRUV